Chapter 1

微分

1.1 微分の定義

微分とは接線の傾きと解釈できるもので、感覚的には

$$f(x) = \frac{\Delta y(x)}{\Delta x}$$

です。

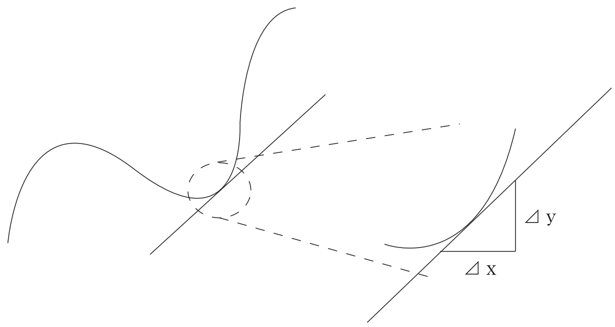

Figure 1.1: 微分の概念

厳密には、極限（h を 0 に限りなく近づける）を使って

$$f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} \tag{1.1}$$

微分の記号は $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$ や $\dot{y}$ や y' という風に書きます。

1.1.1 例　累乗の微分

$y = x^n (n = 1, 2, 3 \cdots)$ を微分すると

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x^n + nhx^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_2\mathrm{h}^2\mathrm{x}^{\mathrm{n-2}}...) - \mathrm{x^n}}{h} = nx^{n-1} \tag{1.2}$$

となる

1.2 微分の公式

1.2.1 積の公式

二つの関数の積の微分は以下のようになる

$$\begin{aligned}
(f(x)g(x))' &= \lim \frac{1}{h}\left(f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)\right) \qquad (1.3)\\
&= \lim \frac{1}{h}\left(f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h)\right)\\
&= \lim \frac{1}{h}\left[(f(x+h) - f(x))g(x+h) + f(x)(g(x+h) - g(x))\right]\\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

1.2.2 合成関数

関数の中に関数が入れ子になっているような合成関数の微分は以下のようになる

$$\begin{aligned}
(f\,(g(x)))' &= \lim \frac{1}{h}(f\,(g(x+h)) - f\,(g(x))) \qquad (1.4)\\
&= \lim \frac{f\,(g(x+h)) - f\,(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\\
&= g'(x)f'\,(g(x))
\end{aligned}$$

この二つの公式は大変よく使う。

1.3 三角関数と微分

三角関数の幾何学的な定義は、半径 1 の円の弧 θ のときの縦の長さが $\sin\theta$、横の長さが $\cos\theta$。角度はラジアンを使っています（180 °=π、360 °=2 π）

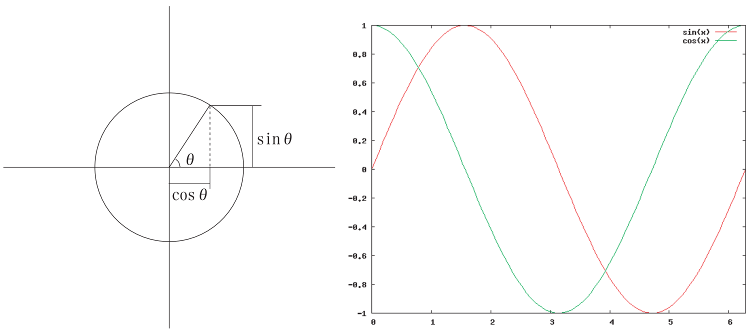

Figure 1.2: 三角関数

1.3.1 加法定理

角度の和をとった三角関数には以下のような公式がある。二つの角の和が 0 から π/2 までのときは図加法定理 1.3 を参照してください。（それ以降の角のときの証明は省略します）

$$\cos(\theta+\phi) = OA - BD = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi \qquad (1.5)$$
$$\sin(\theta+\phi) = AB + CD = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi \qquad (1.6)$$

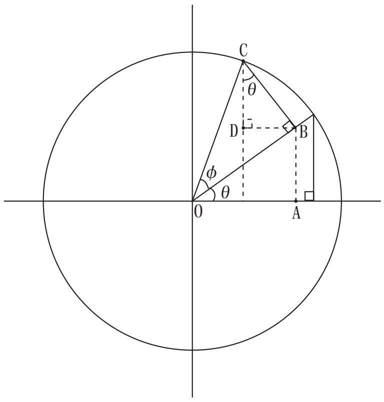

Figure 1.3: 加法定理

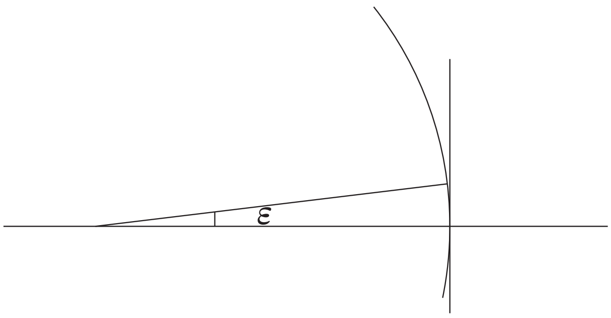

Figure 1.4: 角度が小さいときの近似

1.3.2 角度が小さいときの近似

$\varepsilon \to 0$ で接線の傾きは横軸に直角なことから

$$\sin\varepsilon \cong \varepsilon \tag{1.7}$$
$$\cos\varepsilon \cong 1 \tag{1.8}$$

と近似できる。

1.3.3 三角関数の微分

微分は加法定理と角度が小さいときの近似を使えば

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\sin\theta}{\mathrm{d}\theta} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(\theta+h)-\sin\theta}{h} && (1.9)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin\theta\cos h+\cos\theta\sin h-\sin\theta}{h} && (1.10)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin\theta\cdot 1+\cos\theta\cdot h-\sin\theta}{h} && (1.11)\\
&= \cos\theta && (1.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}\theta} &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(\theta+h)-\cos\theta}{h} && (1.13)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos\theta\cos h-\sin\theta\sin h-\cos\theta}{h} && (1.14)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos\theta\cdot 1-\sin\theta\cdot h-\cos\theta}{h} && (1.15)\\
&= -\sin\theta && (1.16)
\end{aligned}$$

と計算できる。sin の微分は cos、cos の微分は sin に対応する（負号が付きますが）という特殊な関係が物理で有用です。

1.4 指数関数の微分とネイピア数

$y = a^x$ という指数関数を微分しようとした場合

$$\frac{\mathrm{d(a^x)}}{\mathrm{dx}} = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h-1)}{h}$$

となりこれ以上計算できないが $h\to 0$ で

$$e^h - 1 \cong h$$

となるような数のとき

$$\frac{\mathrm{d(e^x)}}{\mathrm{dx}} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h} = e^x$$

で計算できる

$h\to 0$ で

$$e^h = 1+h \tag{1.17}$$
$$e = \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} \tag{1.18}$$
$$e = \lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n \tag{1.19}$$

のような数 e を「ネイピア数」、また「自然対数の底」という

このような e という数がちゃんと有限の値になるのか疑問なので

$$(1+1/n)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + {}_n\mathrm{C}_2 \left(\frac{1}{\mathrm{n}}\right) + \cdots = 2 + \sum_{\mathrm{k}=2}^{\mathrm{n}} {}_{\mathrm{n}}\mathrm{C}_{\mathrm{k}} \left(\frac{1}{\mathrm{n}}\right)^{\mathrm{k}}$$

と展開してみるとわかるが e¿2 がわかる。さらに

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{n} {}_n\mathrm{C}_{\mathrm{k}} \left(\frac{1}{\mathrm{n}}\right)^{\mathrm{k}} &= \sum_{n=2}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{1}{n^k} && (1.20)\\ &< \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} && (1.21)\\ &< \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{n} && (1.22)\end{aligned}$$

よって

$$2 < e < 3$$

と示せる。実際数値計算により

$$e = 2.71828\cdots$$

となることが知られている。この e を使えば一般の $a(a \in \mathbf{R})$ に対しても

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{a}^{\mathrm{x}})}{\mathrm{dx}} = \frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{\log \mathrm{a} \cdot \mathrm{x}})}{\mathrm{dx}} = \log a \cdot e^{\log a \cdot x} = \log a \cdot a^x$$

と計算できる。

1.5 その他の関数

1.5.1 $\log x$ の微分

$$\begin{aligned}\left(e^{\log x}\right)' &= x' && (1.23)\\ (\log x)' e^{\log x} &= 1\\ (\log x)' &= \frac{1}{x}\end{aligned}$$

1.5.2 一般の $a(a \in \mathrm{R})$ の累乗の微分

$$\begin{aligned}(x^a)' = (e^{\log x \cdot a})' &= (a \log x)' e^{\log x \cdot a} && (1.24)\\ &= a \frac{1}{x} x^a\\ &= a x^{a-1}\end{aligned}$$

Chapter 2

積分

積分は微分の逆演算で

$$\int f(x)\mathrm{dx} \tag{2.1}$$

と表記し

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\int f(x)\mathrm{dx} = \mathrm{f(x)} \tag{2.2}$$

または

$$\int \frac{\mathrm{df(x)}}{\mathrm{dx}}\mathrm{dx} = \mathrm{f(x)} \tag{2.3}$$

という関係で定義される。

2.1 積分の例

x の累乗

$$\int x^n \mathrm{dx} = \frac{1}{\mathrm{n+1}}\mathrm{x^{n+1}} + \mathrm{C}$$

三角関数

$$\int \sin x \mathrm{dx} = -\cos \mathrm{x} + \mathrm{C}$$

証明は右辺を微分すれば明らか。C は積分定数と呼ばれ、この定数は何でも構わない（微分すれば消えるので）積分には常にこの不定性が付きまとう。

2.2 定積分

$$F(x) + C = \int f(x)\mathrm{dx}$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = \mathrm{F(b) + C - F(a) + C = F(b) - F(a)}$$

を定積分といい、f(x) の x=a から b までの面積に相当する。

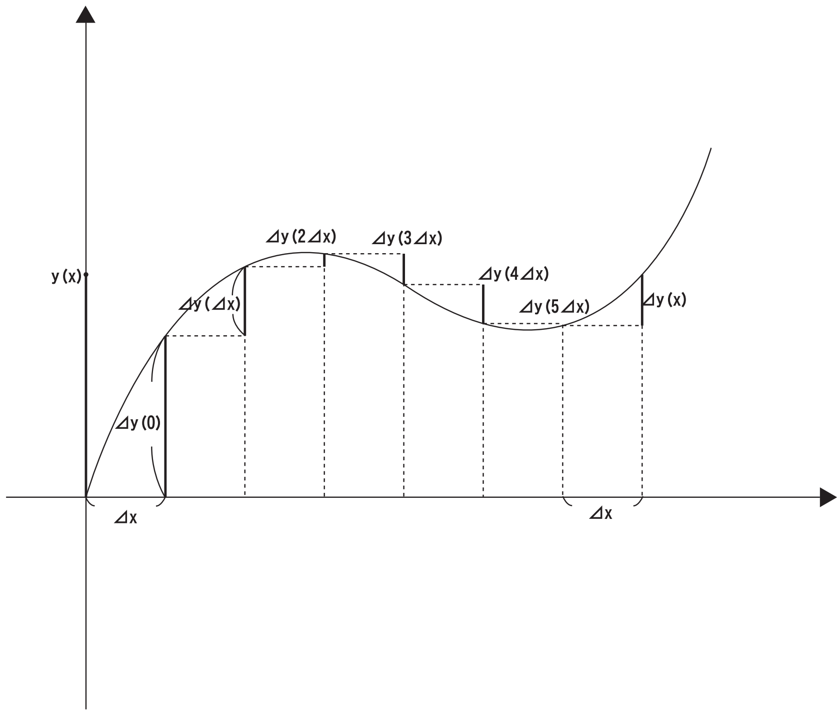

Figure 2.1: 積分の概念

2.3 積分の直感的理解と面積

微分の直感的な概念が

$$\frac{\mathrm{dy(x)}}{\mathrm{dx}} = \frac{\Delta y(x)}{\Delta x}$$

だったので、これを元のｙに戻す操作こそが積分のはずで

まず、

$$\frac{\Delta y(x)}{\Delta x} \cdot \Delta x = \Delta y(x)$$

とすると、x での Δx だけ x が変化したときの y の変化 $\Delta y(x)$ が得られるが、これだけでは y(x) には程遠い。y(x) を得るためには x が 0〜x までの $\Delta y(0), \Delta y(\Delta x), \Delta y(2\Delta x), \Delta y(3\Delta x), \cdots \Delta y(x)$ を全て足し合わせてやればいいはずで

$$y(x) \cong \Delta y(0) + \Delta y(\Delta x) + \Delta y(2\Delta x), \cdots + \Delta y(x) = \sum_{x=0}^{x} \frac{\Delta y(x)}{\Delta x} \cdot \Delta x$$

一番右辺の項で

$$\sum_{x=0}^{x} \rightarrow \int$$

$$\frac{\Delta y(x)}{\Delta x} \rightarrow \frac{\mathrm{dy(x)}}{\mathrm{dx}}$$

$$\Delta x \rightarrow \mathrm{dx}$$

を書き直すとまさに積分の表示になる。実際 $\int$ は Sum(足し上げる) の S を文字ったものからきてます。ただ、この際 x=0 での y の値 y(0) の情報は微分からは得られないので、この部分の不定性が積分定数 C の不定性となって出てくると解釈できます。

この考えで

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx}$$

という定積分を見てみると

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} \to \sum_{\mathrm{x=a}}^{\mathrm{b}} \mathrm{f(x)} \cdot \Delta\mathrm{x}$$

でこれは f(a) から f(b) までの面積と確かに考えられます。

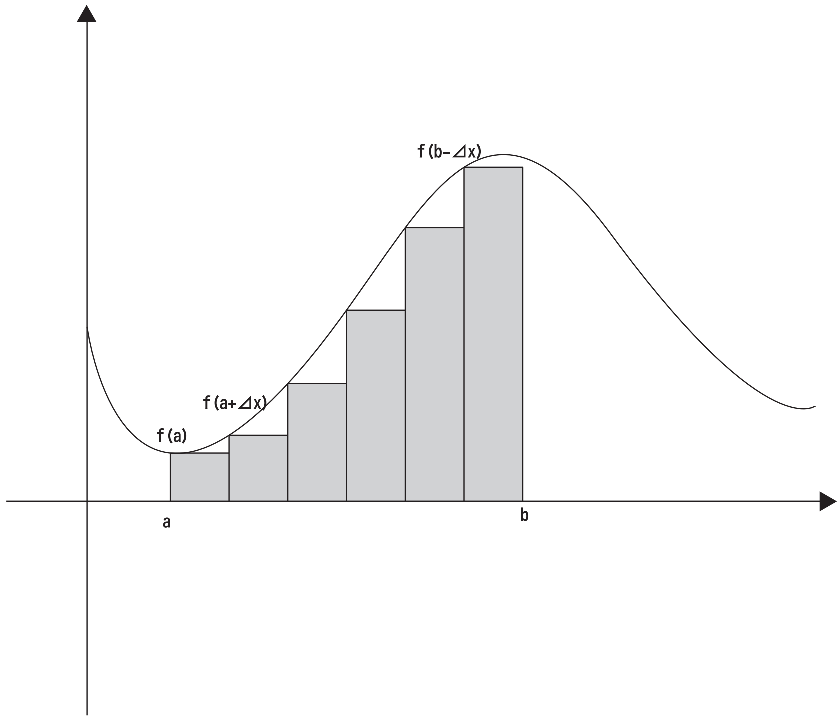

Figure 2.2: 定積分と面積

2.4 積分の性質

2.4.1 積分変数の変換

$$F(x) = \int f(x)\mathrm{dx}$$

に対して積の微分の公式を使い

$$\frac{\mathrm{dF(x(t))}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{dF}}{\mathrm{dx}}\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = f(x(t))\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}$$

両辺 t で積分すると

$$\int \frac{\mathrm{dF(x(t))}}{\mathrm{dt}}\mathrm{dt} = \int f(x(t))\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}\mathrm{dt} \quad (2.4)$$

$$\int f(x(t))\mathrm{dx} = \int f(x(t))\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}\mathrm{dt} \quad (2.5)$$

という関係が得られる

2.4.2　部分積分

$F(x)=\int f(x)\mathrm{dx}$ ならば

$$\int f(x)g(x)\mathrm{dx}=\mathrm{F(x)g(x)}-\int \mathrm{F(x)g'(x)dx} \tag{2.6}$$

という関係がある。これを部分積分という。

証明は積の微分の公式を使い

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{dF(x)g(x)}}{\mathrm{dx}} &= \frac{\mathrm{dF(x)}}{\mathrm{dx}}g(x)+F(x)\frac{\mathrm{dg(x)}}{\mathrm{dx}}\\ &= f(x)g(x)+F(x)g'(x)\end{aligned}$$

両辺積分し項を入れ替えると

$$\begin{aligned}F(x)g(x) &= \int f(x)g(x)\mathrm{dx}+\int \mathrm{F(x)g'(x)dx}\\ \int f(x)g(x)\mathrm{dx} &= F(x)g(x)-\int F(x)g'(x)\mathrm{dx}\end{aligned}$$

と得られる。

積分変数の変換や部分積分は積分計算で非常によく使うテクニックです。