はじめに

この書き物は、電磁気学の入門・専門書の要約といったもののつもりです。いきなり専門書を読むと、ものにもよりますが詳しすぎたり公式が多すぎて、どれが大切なのかわからなくなって混乱した経験がぼくにはあるので、これを読んで、あるいはこれと平行して専門書を読むと、話の骨がわかってスムーズに勉強できると思います。主な対象としては、大学１、２回生ぐらいになるでしょうが、是非高校生や物理に興味のある人にも読めるようになるべくわかりやすく書いたつもりです。ただ、どうしても高校物理や微分積分の知識は必要です。もし、わからない部分がありましたらメールでなんなりと聞いてください。
また、完全に理解できるに越したことはありませんが、ここの目的は骨をつかむことなのでパッと理解できない部分があったら、流し読んで先に進んでみてください。正直難しい部分は証明がメインだったりするので必ずそこを理解していないと先に進めない訳ではなかったりするので。
また、この参考文献として、「物理テキストシリーズ　電磁気学」著砂川重信（岩波書店）を使っています。より詳しく知りたい人は是非読んでみてください。

Contents

Chapter 1

目的と道筋

さて本題に入りますが、電磁気学の目的は電気的な力（電場、磁場）がかかるとき物体がどんな運動をするかが知りたいわけです。ただ力が分かっていれば運動はニュートンの運動方程式からわかるので、要するに電気的な力（電場、磁場）がどうなるかが問題なわけです。
そして実はその電場、磁場の振る舞いは先人たちの努力の結果、次の四つの式でまとめられています。

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{\rho(\mathbf{x}, t)}{\varepsilon_0} \tag{1.1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0 \tag{1.2}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathrm{t})}{\mathrm{dt}} \tag{1.3}$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}\mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathrm{t})}{\mathrm{dt}} + \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) \tag{1.4}$$

これは電磁気学おける最も基本となる式、(真空での) マクスウェル (Maxwell) 方程式というものです。
ここで記号は $\mathbf{E}$ が電場，$\mathbf{B}$ が磁束密度、$\mathbf{i}$ は電流密度 、ρ は電荷密度です。
ε_0 は真空の誘電率，μ_0 は真空の透磁率といい、これらは定数なんですが…。

といきなり、わけわからない式や記号を並べらても、混乱するだけでですよね。要するに「電磁気学」とはこの「Maxwell 方程式を理解すること」といってしまえるということです。この四つの式を理解し使いこなす上で重要なのが「ガウスの定理」と「ストークスの定理」という二つの数学の定理です。マクスウェル方程式の見なれない ∇ なんかはそれらの定理と深く関係しています。つまり電磁気学をまなぶということは

- マクスウェル方程式 (4 つ)
- ガウスの定理
- ストークスの定理

これら押えてしまえばいいんだな、と頭に置いておきながら読んでほしいんです。

Chapter 2

クーロンの法則とガウスの定理

2.1 クーロンの法則と電場

というわけで、さっそくマクスウェル方程式の一つ目、

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{\rho(\mathbf{x}, t)}{\varepsilon_0}$$

を導いていきましょう。実はこの式、高校やもしかすると中学でやったクーロンの法則なんです。「全然違うだろ !! 」と思うかもしれませんが、クーロンの法則をガウスの定理を使って書き直すとこうなるんです。それを順を追ってみていきます。

それにはまず復習から行きましょう。電磁気学の歴史としては、この式

$$F_1 = \frac{kQ_0Q_1}{r^2} \tag{2.1}$$

クーロンの法則から出発します。これは点電荷 Q_1 に働く力の大きさ F_1 が点電荷 Q_0，Q_1 に比例して、距離ｒの２乗 r^2 に反比例するという実験事実を式にしたものです。
このままでは、中高レベルですので、大学らしくこの式をベクトルで書き直してみましょう。

すると

$$\mathbf{F_1} = \frac{kQ_0Q_1}{|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}|^2} \cdot \frac{(\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0})}{|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}|} \tag{2.2}$$

となります。右辺第二項が点電荷 Q_0 から Q_1 へのベクトル（向き）を示しています。絶対値で割ってあるのは大きさを１にするためです。さて、ところでこの力は「いつから」働くんでしょうか？
もし片方の電荷がぽんっと突然現れたとすると、もう一方はいつから力を感じるでしょうか？その瞬間からでしょうか？宇宙の端と端とでも？
それはちょっと考えにくいので、電荷はまず「電場」を自分の周りに作り、この電場がほかの電荷に力を及ぼすと考えてみましょう。電場の強さ=働く力/力を感じる電荷、として先ほどのクーロンの法則を電場というものを考えて書き直すと

$$\mathbf{F}(\mathbf{x_1}) = Q_1\mathbf{E}(\mathbf{x} = \mathbf{x_1}) \tag{2.3}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{kQ_0(\mathbf{x} - \mathbf{x_0})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x_0}|^3} \tag{2.4}$$

これはまず、電荷 Q_0 が空間に電場 $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ を作り、それが Q_1 に力を及ぼしていることを式にしたものです。

さて、「で、結局電場ってなんだよ？よくわからんもん勝手につくるなよ！」とか思った人もいるのではないでしょうか？
電場とは結局最初はこのように「なんとな～くあるんじゃないかな～」とファラデーが考えだしたものです。実際、昔はそんな不確かな電場の存在を頑なに認めない人も結構いたそうです。ただ教科書の絵のように電荷からたくさんの矢印が出ている図は直感的にわかりやすいですよね。電場なんかなく「電荷から電荷に何も介さずに力が働く」という考え方を「遠隔作用」と呼び、電場なんかが介しているんだという考えを「近接作

用」をいいます。しばらくこの「遠隔 v.s 近接」の論争は平行線をたどるのですが近接作用、つまり電場磁場の考えはマクスウェルにより美しくまとめられ、さらに「電磁波」の存在を予言しました。ご存知のようにこの電磁波が予言どおり発見され「遠隔 v.s 近接」の論争にピリオドが打たれたのです。そんなわけなんでとりあえず電場の存在を認めてもらって話をすすめていきましょう。

普通、電荷が点電荷とは限らないので、電荷が体積 V の大きさを持っているときは、電荷密度 $\rho(\mathbf{x})$ を V で積分してやったもの

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int_V \mathrm{d}^3\mathrm{x}' \frac{\mathrm{k}\rho(\mathbf{x}')(\mathbf{x}-\mathbf{x_0})}{|\mathbf{x}-\mathbf{x_0}|^3} \tag{2.5}$$

で表せます。この式を計算できればあらゆる形の電荷の作る電場を求めることができます。その例を以下で見てみましょう。

例題 無限に長い直線状の電荷の電場

さて、上の式を使えば様々な形状の電荷の作る電場を求めることが理論的にはできますが、実際は積分計算なので厳密に解けるのは限られた場合だけです。例えば、電荷の線密度が λ であるような無限に長い直線状の電荷の作る電場を考えてみましょう。電荷は z 軸に沿ってあるとします。ここで $(0,0,z)$ にある電荷の微小部分 $\lambda\mathrm{dz}$ は点電荷とみなせるので、それが点 $P(R,0,0)$ に作る電場の強さは、

$$\Delta E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{r}^2}$$

しかし、電荷の直線は無限に長いので、直線に直交する成分以外は相殺されます。ので残る直交の成分は

$$\Delta E\sin\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sin\theta\mathrm{dz}}{\mathrm{r}^2}$$

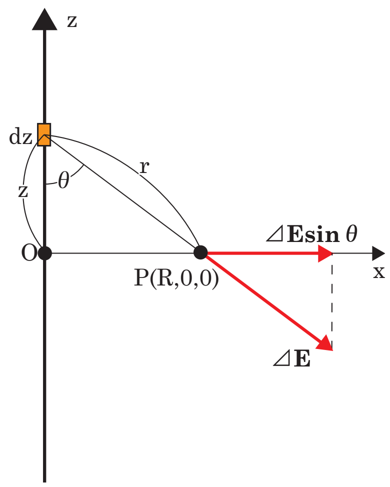

Figure 2.1: 直線状電荷のつくる電場

さて、図より $z = R/\tan\theta$ よって $\mathrm{dz} = -\mathrm{R}/\sin^2\theta$、また $r = R/\sin\theta$ なのでこれらを代入すると

$$\begin{aligned} E(R) &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_\pi^0 -\sin\theta\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^\pi \sin\theta\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R} \end{aligned} \tag{2.6}$$

2.2　ガウスの法則

とりあえず、クーロンの法則（2.5）

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int_V \mathrm{d}^3\mathrm{x}' \frac{\mathrm{k}\rho(\mathbf{x'})(\mathbf{x} - \mathbf{x_0})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x_0}|^3}$$

を使えば積分できればあらゆる形の電荷からできる電場を求めることができる、ということがわかりました。ということはこれこそが基礎方程式のひとつであるべきじゃないか？と思うかもしれません。そうなんです、これが基本式のひとつです。
ただちょっと書き直すとさっきの

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{\rho(\mathbf{x}, t)}{\varepsilon_0}$$

になります。
「なんでわざわざ書き直すんだ?! 同じならわざわざわけわからない式にしなくていいじゃないか！」
と思うかもしれません。書き直す前のは「電荷があると電場はどうできるか？」という式の形をしています。つまり電荷が主語なのです。しかしさっき僕らは電場の存在を認めたんでした。なら電場を主役にして書き直してみようじゃないか！ってのが書き直す動機です。今後この「場」の考え方は様々なところに応用され成功します。そんなわけなんでなんとか納得してもらって話をすすめましょう。
　さて電場に関しての式を書くにしたがって、最低限の条件をまとめてみましょう

- 電場とは電荷の量に比例してから生まれる（消える）矢のようなイメージ
- 電荷が関係しなければ勝手に増えたり消えたりしない
- 一方向に偏ることなく満遍なく広がる（空間に対して対称性がある、といいます）

さて、次に目指すのはこのことを数式にして法則化することです。物理ってのは「物事を数式にすること」といえるでしょう。
そのために次のようなイメージを考えてみてください。
あるところに電荷があり、それを風呂敷かなんかでぐるっと囲みます。するとその風呂敷を突き抜けていく（-なら入ってくる）電場の矢の総数は当然中でできた電場の量、つまり電荷に比例しますね。これは風呂敷にスキマがなければよくて別に大きさや包み方には拠りません。

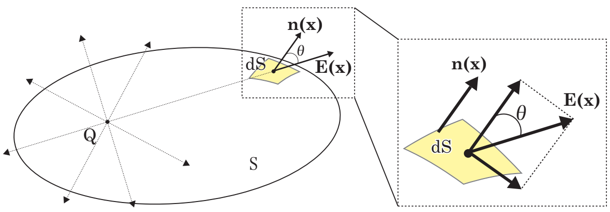

Figure 2.2: 閉曲面

　こんなイメージをさっそく式にしてみましょう。まず風呂敷、というとあれなのでぐるっと閉じた面という意味で以下「閉曲面」といいます。でその閉曲面の一部を拡大してみてみます。充分小さな面積 dS をとってくればそこは平らで電場の向きと大きさは同じと考えていいでしょう。そこの電場 $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ がその面をどれだけ貫いていくかはその電場の向きによります。もし面に垂直なら 100 %貫いていくし、反対に水平なら全然出て行ってないですね。つまりその電場の面に垂直な成分だけが貫くわけです。そこで面に垂直な大きさ 1 のベクトル（単位法線ベクトルといいます）$\mathbf{n}(\mathbf{x})$ と電場 $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ との内積をとってやればそれが出て行く（-なら入ってくる）電場の量になります。
さて、この量を閉曲面の全部分で計算し足し合わせたもの

$$\sum_{totalareaS} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \mathrm{dS}$$

が閉曲面を出て行く（入ってくる）電場の総量すなわち中の電荷の量 Q と比例するわけです。
ところで微小部分を計算し足し合わせるってのは要するに積分するってことですよね。なので比例係数を ε_0 とトキトーにとってまとめて書き直すと

$$\int_S \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \mathrm{dS} = \frac{\mathrm{Q}}{\varepsilon_0} \tag{2.7}$$

この式を「積分系のガウスの法則」といいます。ここで ε_0 が割ってあるのはガウスさんが最初に比例係数 ε_0 を電場側にかけるように決めたんですが電場側にかかってると不便だったので割っただけにすぎません。さてこれで一応数式になったんですが「なんか余計にわかりにくくなったぞ」と思っている人もいるかもしれません。でも、この式なかなかすごいんですよ、なにがすごいかちょっと具体的に見てみましょう。

例題 点電荷の作る電場

基本にもどり、点電荷 Q の場合にガウスの法則を当てはめて見ましょう、まず次の図のように点電荷を中心にぐるっと半径 r の球で囲んでみましょう。今点電荷は球の中心にいるので、放射上に広がる電場と球面と垂

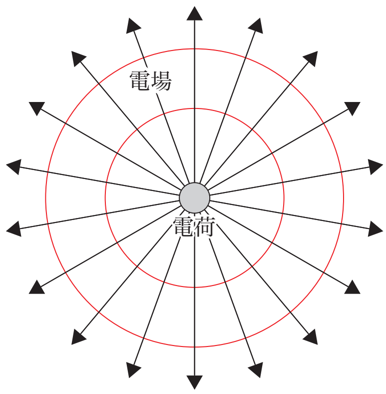

Figure 2.3: 球を貫く電場

直、しかも大きさは球面のどこでも一緒なのでガウスの法則は

$$\begin{aligned}\int_S \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \mathrm{dS} &= \frac{\mathrm{Q}}{\varepsilon_0} \\ E\int_S \mathrm{dS} &= \frac{\mathrm{Q}}{\varepsilon_0} \\ 4\pi r^2 E &= \frac{Q}{\varepsilon_0} \\ E &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\end{aligned}$$

さて、$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = k$ と書き直してやると、これはまさにクーロンの法則ですね。これでちゃんとクーロンの法則＝ガウスの法則がわかりました。
「おんなじならやっぱりクーロンの法則のままでいいじゃんか！結局ガウスのどこがすごいんだよ?!」
という突っ込みの答えは、ずばり「r の逆二乗」です！
なぜ E が r の逆二乗に比例することはクーロンの法則では「実験事実である」という説明しかできません。もしかしたらきっちり 2 じゃなくて 2.0013 かもという可能性すら残ってます。ところがガウスの法則では式を追ってみると「ほら、球の表面積からでてくるよ」と r の逆二乗を説明できるわけです！そんなわけで一歩リードしているガウスの法則が基本法則になったわけです。

例題 無限に長い直線状の電荷の電場

つづいて、この積分形のガウスの法則を使って、先ほどクーロンの法則で求めた問題を解いてみよう。直線を中心とする厚さが 1 で半径が R の円筒を考え、その表面で積分形のガウスの法則を使います。今、電場は半

径方向にあるので、円筒のフタの部分は寄与しません。側面の単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ は電場と平行なのでそのままかけられて、

$$\int \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\mathrm{dS} = 2\pi\mathrm{R}\cdot\mathrm{E}(\mathrm{R}) = \frac{\lambda}{\varepsilon_0}$$

よって

$$E(R) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}$$

と先ほどのクーロンの法則から求めるのよりも大分簡単に式（2.6）が得られることがわかりますね。

2.3 微分系のガウスの法則

さて、無事電場に関する式である積分形のガウスの法則（2.7）

$$\int_S \mathbf{E}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})\mathrm{dS} = \frac{\mathrm{Q}}{\varepsilon_0}$$

を導けてめでたしめでたしといきたいところですが、この章の目標であったあの式

$$\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \frac{\rho(\mathbf{x},t)}{\varepsilon_0}$$

がまだ出てきません。この式の名前は「微分系のガウスの法則」といい、積分形のガウスの法則とは親戚、いや同じ人物の右側と左側のようなものです。
実際、積分系のガウスの法則の Q は閉曲面内の電荷という意味だったので電荷密度 $\rho(\mathbf{x})$ を使って書き直すと

$$\int_S \mathbf{E}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})\mathrm{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\mathrm{V}}\rho(\mathbf{x})\mathrm{dV} \tag{2.8}$$

となり大分似ていることがわかると思います。ただ問題は左辺は面積 S の積分（２次元)、右辺は体積 V の積分（３次元）なので単純に微分できないことです。その辺の問題を解決するためにあの変な三角形 $\nabla\cdot$ とか出てくるわけです。
「積分系のガウスの法則で電場がもとまるならそれでいいじゃないか！なぜわざわざ微分形に書き直すのか？」というと、積分系は当然「電場の集まりの性質」を記述したものです。そりゃそうでしよね、足し上げてるんですから。今目指すは「電場」の性質を記述する式なわけです。そのためには積分しない式の形、つまりは微分系にしたいわけです。

2.3.1 ガウスの定理

さっそく微分形に書き直すに当たって、まずガウスの定理というものを証明します。もうちょっと簡単な説明がいい人は 6 章「マクスウェルの方程式の意味」を参照してください。
さて、体積が $\Delta^3\mathbf{x} \equiv \Delta x\Delta y\Delta z$ な微小な箱を考えて、その近辺の電場（電場じゃなくても任意のベクトルでこの定理は成り立ちます）を表面積 S で面積分することを考えます。

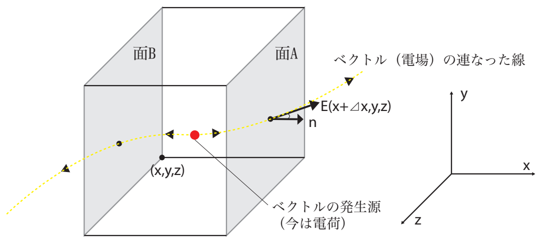

Figure 2.4: ガウスの定理

まず、x 軸に垂直な二面 A、B について考えます。A を貫く電場の強さは x 方向の電場なので $E_x(x+\Delta x,y,z)$、A の面積は $\Delta y\Delta z$ なので

$$\int_A \mathbf{E}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})\mathrm{dS} = \mathrm{E_x(x+\Delta x,y,z)\Delta y\Delta z}$$

B では、貫く電場の向きが x 方向のマイナスなことを考慮するとあとは一緒で

$$\int_B \mathbf{E}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})\mathrm{dS} = -\mathrm{E_x(x,y,z)\Delta y\Delta z}$$

この二つを合わせて

$$\begin{aligned}\int_{A+B} \mathbf{E}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})\mathrm{dS} &= (E_x(x+\Delta x,y,z)\Delta y\Delta z - E_x(x,y,z)\Delta y\Delta z)\cdot\Delta y\Delta z \\ &= \frac{E_x(x+\Delta x,y,z)\Delta y\Delta z - E_x(x,y,z)\Delta y\Delta z}{\Delta x}\cdot\Delta x\Delta y\Delta z \\ &= \frac{\partial E_x(\mathbf{x})}{\partial x}\Delta^3 x\end{aligned}$$

となります。y 軸と z 軸に垂直な面についても同様に計算でき、それらを合わせると

$$\int_S \mathbf{E}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})\mathrm{dS} = (\frac{\partial \mathrm{E_x}(\mathbf{x})}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial \mathrm{E_y}(\mathbf{x})}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial \mathrm{E_z}(\mathbf{x})}{\partial \mathrm{z}})\Delta^3\mathrm{x}$$

ここで $\nabla \equiv (\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})$ というものを考えると上の式は

$$\begin{aligned}\int_S \mathbf{E}(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x})\mathrm{dS} &= (\frac{\partial E_x(\mathbf{x})}{\partial x} + \frac{\partial E_y(\mathbf{x})}{\partial y} + \frac{\partial E_z(\mathbf{x})}{\partial z})\Delta^3 x \\ &= \nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{x})\Delta^3 x \qquad (2.9)\end{aligned}$$

と書けます。この $\nabla\cdot\mathbf{E}$ を $\mathbf{E}$ の「発散」（divergence）と言います。その理由はこれがこのベクトル、今は電場が微小な箱から (単位時間に) 出て行く量を表しているからです。本によっては、この $\nabla\cdot\mathbf{E}$ を「発散」と言う意味で $div\mathbf{E}$ と書くものをあります。

ところで、今任意の閉曲面のとき、図のようにたくさんの微小な箱に分割し

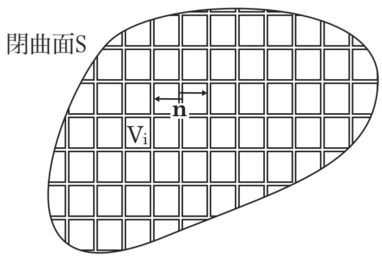

Figure 2.5: 任意の閉曲面

$$\int_S \mathbf{E}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})\mathrm{dS} = \sum_\mathrm{i}\int_{\mathrm{S_i}} \mathbf{E}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})\mathrm{dS}$$

と書けます。これは V_i の隣り合う面同士は $\mathbf{n}$ が逆向きなので相殺され、結局隣り合う面のない面だけが足し合わされる、つまり閉曲面 S だけになるからです。よって

$$\int_S \mathbf{E}(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x})\mathrm{dS} = \sum_i\int_{S_i} \mathbf{E}(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x})\mathrm{dS}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_i (\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x})\Delta^3 x) \\
&= \int_V \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) \mathrm{d}^3\mathrm{x} \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

を得ます。（ガウスの定理）これはつまり、面での積分を体積の積分に変換する式です。これと積分形のガウスの法則（2.8）を合わせると

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x})(\mathbf{x})\mathrm{d}^3\mathrm{x} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\mathrm{V}} \rho(\mathbf{x})\mathrm{d}^3\mathrm{x}$$

となります。これを両辺微分すれば、

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{x})$$

となり、今までの議論は電場･電荷密度が時間を含む関数であっても問題ないので $\mathbf{E}(\mathbf{x}) \to \mathbf{E}(\mathbf{x}, t), \rho(\mathbf{x}) \to \rho(\mathbf{x}, t)$ とすると、やっと目的だった微分形のガウスの法則

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{x}, t) \qquad (2.11)$$

となります。この式はつまり微小な箱から出てくる電場の量はその箱の電荷の量に比例し、電荷がないときは電場はないか、または箱を素通りしていく、というごく当たり前なことを表しているわけです。ただ、微分形の数式にすることで解析的に扱え、例えば電磁波などを導けるのです。

Chapter 3

磁場

3.1　アンペールの力

電場の基本法則が導けたので次は磁場です。磁場というと、よくあるあの磁石から出ている線で表されるもののことですが、ここでは磁石ではなく電流から生じる磁場について考えていきます。

磁場があるとどうなるのかをとりあえず知らないと磁場がどうなっているのか知れてもうれしくありません。のでここからはまず、磁場からはどんな力を受けるのかについて述べていきます。内容的には高校までにやるものと同じなので、わかっている人は「定常電流」の章以外は読み飛ばしてください。

さて、一本の導線に電流を流し、もう一本電流を流した導線を近づけると力が働きます。これがアンペールの力です。これは電場と同じように電流の周りにまず、磁場というものができて、その磁場から電流が力を受けると考えます。

電流からできる磁場は実験から、電流の方向に対して右回りに、円状にできることがわかっています。そして、力は下図のように働くことがわかっています。これはよくフレミングの左手の法則として知られています。

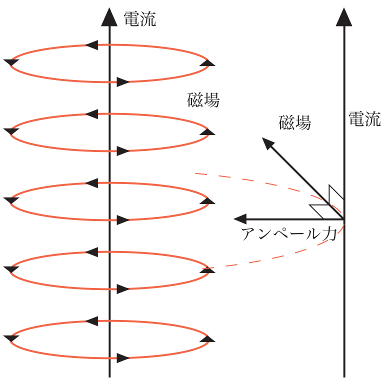

Figure 3.1: 磁場と力

3.1.1　ベクトル積

ずっと左手をこちゃこちゃして力の方向を求めているわけにもいかないので、数学の言葉でフレミングの左手の法則を表してやりましょう。そのために、ベクトル積というものを考えます。いま、ベクトル $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ があるとします。そのベクトル積は $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ と書き、これは大きさが $AB \sin\theta$ で、方向が $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ に垂直で $\mathbf{A}$ から $\mathbf{B}$ に回して右ねじが進む方向を向いているベクトルです。（$\mathbf{A}$ を電流、$\mathbf{B}$ を磁場とすると $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ がアンペール力の方向です）つまり、それぞれの単位ベクトル $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_x$ に対して

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x$$
$$\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y$$
$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z = 0$$

が成り立ちます。これから、$\mathbf{A} = A_x\mathbf{e}_x + A_y\mathbf{e}_y + A_z\mathbf{e}_z, \mathbf{B} = B_x\mathbf{e}_x + B_y\mathbf{e}_y + B_z\mathbf{e}_z$ は

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\mathbf{e}_x + (A_zB_x - A_xB_z)\mathbf{e}_y + (A_xB_y - A_yB_x)\mathbf{e}_z$$

と書けます。これを使い、定常電流 I（時間変化しない電流）の導線の微小な部分 $\Delta\mathbf{s}$(方向は電流の向き) にかかるアンペールの力は

$$\Delta\mathbf{F}(\mathbf{s}) = I\Delta\mathbf{s} \times \mathbf{B}(\mathbf{s}) \tag{3.1}$$

と書けます。このように定義した磁場 $\mathbf{B}$ を「磁束密度」といいます。これを導線の形で積分してやれば、導線全体にかかる力が求まるわけです。

3.2 定常電流

さて、定常電流とは、時間変化しない電流と言いましたがもう少し詳しく説明すると、単位面積当たりの電流の強さを「電流密度」$\mathbf{i}(\mathbf{x})$ が時間に依存しないとき、その電流を「定常電流」といいます。

電流とは単位時間当たりに流れる電荷の量のことでした。定常電流の場合、任意の閉曲面 S に囲まれた領域 V に単位時間に流れ込む電荷の量は、その領域から出て行く電荷の量と等しくなります（そうでないと流れが淀んでしまいます)。これを「定常電流の保存則」といいます。この法則を数式にすると、まず、微小面 dS を通過する電荷の量は dS の単位法線ベクトル $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ を用いて

$$\mathbf{i}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})\mathrm{dS}$$

ここで、面 S_1 からのみ電荷が入って S_2 からのみ出て行くような円筒形の領域を適当に取れば、

$$\int_{S_1} \mathbf{i}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_1(\mathbf{x})\mathrm{dS} = \int_{\mathrm{S}_2} \mathbf{i}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_2(\mathbf{x})\mathrm{dS}$$

となります。今、$\mathbf{n}_2(\mathbf{x}) = -\mathbf{n}_1(\mathbf{x})$ となるので

$$\int_S \mathbf{i}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})\mathrm{dS} = 0$$

と書け、ガウスの定理（2.10）を使うと

$$\nabla \cdot \mathbf{i}(\mathbf{x}) = 0 \tag{3.2}$$

となります。

3.3 ローレンツの力

ところで、電流というのは電荷の流れのことなので、上のアンペールの力はすなわち動く電荷に働く力として考えることができます。それにはまず、導線上の１点 $\mathbf{x}$ における微小部分をとり、そこにかかるアンペールの力を考えます。微小部分は断面積 ΔS、長さ Δl とし、単位体積あたりの力と電流を $\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{i}(\mathbf{x})$ すると力は

$$\Delta\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})\Delta S\Delta l = I\Delta\mathbf{s} \times \mathbf{B}(\mathbf{x})$$

となり、電流は

$$I\Delta\mathbf{s} = \mathbf{i}(\mathbf{x})\Delta S\Delta l$$

とかけるので

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{i}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{x})$$

となります。ここで電荷密度を $\rho(\mathbf{x})$、その速さを $\mathbf{v}$ とすると、$\mathbf{i}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})\mathbf{v}$ なので

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) \tag{3.3}$$

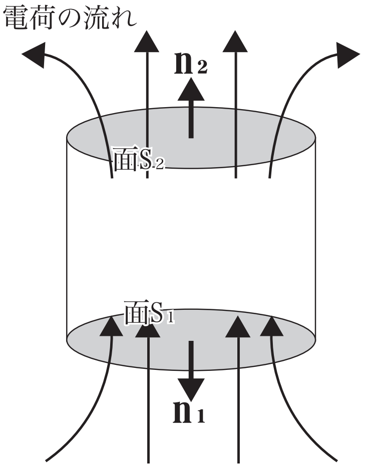

Figure 3.2: 定常電流

電荷 e の点電荷の場合には

$$\mathbf{F} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) \tag{3.4}$$

となります。

特に点電荷にかかる、電場、磁場からの力をまとめたもの

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = e\mathbf{E}(\mathbf{x}) + e\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) \tag{3.5}$$

をローレンツの力と呼びます。

3.4 ビオ・サバールの法則

さてこれで、磁場があったとき、それによって電流がどう力を受けるかは、わかりましたが、では電流からどのように磁場ができるのでしょうか？それを求めていくことでマクスウェル方程式の二つ目と四つ目

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0$$
$$\frac{1}{\mu_0}\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}\mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathrm{t})}{\mathrm{dt}} + \mathbf{i}(\mathbf{x}, t)$$

が導かれていきます。

まず、実験事実として、直線に流れる定常電流の周りにできる磁場は、以下の式で表されます。

$$B(R) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R} \tag{3.6}$$

つまり、磁場は電流に比例し、電流からの距離 R に反比例します。ところでこの式は何かに似ていませんか？一章の例題の式（2.6）

$$E(R) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}$$

とそっくりですね。式（2.6）がクーロンの法則から導かれてのだから、上の磁場の式から逆にクーロンの法則と似た式が導けます。これを「ビオ・ザバールの法則」といい、磁束密度の強さは以下の形で書けます。

$$\mathrm{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\mathrm{Ids}}{\mathrm{r}^2}$$

ここで、ds は導線の微小部分です。ところで、電場は放射状に広がっていくの対して、磁場は電流に対して右巻きの渦巻き状になっています。そのため「ビオ・サバールの法則」をベクトルで書くと

$$\mathrm{d}\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\mathrm{Ids} \times \mathbf{r}}{\mathrm{r}^3} \tag{3.7}$$

となります。

しかし、電流の微小部分、電流素子 ds というものは、電流が電荷の流れであることを考えると、電荷と違ってカケラ単独では存在できず必ず連続してぐるっと一周していないとおかしいですね。また、導線には実際には太さがあるので、それらのことを考慮すると式（3.7）は

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_C \mathrm{d}^3\mathrm{x}' \frac{\mathbf{i}(\mathbf{x}) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \tag{3.8}$$

となります。ここで $\mathbf{i}(\mathbf{x})$ は電流密度です。

このビオ・サバールの法則を解けば、基本時にどんな形の電流からできる磁場が求まることになりますが、ただでさえなかなか解けない積分なのにこんな複雑な形なので、非常に限られたときにしか解けません。そこで、

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}) \tag{3.9}$$

という関係のある「ベクトルポテンシャル」$\mathbf{A}(\mathbf{x})$ というものを考えてビオ・サバールの法則をもう少し簡単な形に書き換えます。この $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ を

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^3\mathrm{x}' \frac{\mathbf{i}(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \tag{3.10}$$

と書くと式 (3.9) を満たします。この積分のほうが見た目どおり計算が楽になります。

さて、ちゃんとこの式が式 (3.9) を満たしていることを示します。まず、x 成分を計算します。

$$\begin{aligned}
B_x(\mathbf{x}) &= (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}))_x \\
&= \frac{\partial A_z(\mathbf{x})}{\partial y} - \frac{\partial A_y(\mathbf{x})}{\partial z} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}[\frac{\partial}{\partial y}\int \mathrm{d}^3\mathrm{x}' \frac{\mathbf{i}(\mathbf{x}')_\mathrm{z}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\mathrm{k}\int \mathrm{d}^3\mathrm{x}' \frac{\mathbf{i}(\mathbf{x}')_\mathrm{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}] \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^3\mathrm{x}'[\mathbf{i}(\mathbf{x}')_\mathrm{z}\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \mathbf{i}(\mathbf{x}')_\mathrm{y}\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}] \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^3\mathrm{x}'[-\frac{\mathbf{i}(\mathbf{x}')_\mathrm{z}(\mathrm{y} - \mathrm{y}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} + \frac{\mathbf{i}(\mathbf{x}')_\mathrm{y}(\mathrm{z} - \mathrm{z}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}] \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^3\mathrm{x}' \frac{(\mathbf{i}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}'))_\mathrm{x}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}
\end{aligned}$$

y、z 成分も同様に計算できるので、これでちゃんと満たしていることがわかります。

3.4.1 ベクトル解析の公式

さて、ベクトルポテンシャルとビオ・サバールの法則（3.9）を使って、本題の

$$\begin{aligned}
&\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0 \\
&\frac{1}{\mu_0}\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}\mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathrm{t})}{\mathrm{dt}} + \mathbf{i}(\mathbf{x}, t)
\end{aligned}$$

である 2 式を導きたいと思います。それにあたってベクトル解析の公式を二つほど導きます。まず、任意のベクトル $\mathbf{X}$ で

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{X} = 0 \tag{3.11}$$

が成り立ちます。これは、以下のように簡単な計算です。

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{X} &= \frac{\partial}{\partial x}(\nabla \times \mathbf{X})_x + \frac{\partial}{\partial y}(\nabla \times \mathbf{X})_y + \frac{\partial}{\partial z}(\nabla \times \mathbf{X})_z \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial X_z}{\partial y} - \frac{\partial X_y}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial X_z}{\partial x} - \frac{\partial X_x}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial X_x}{\partial y} - \frac{\partial X_y}{\partial x}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

　もう一つは

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{X} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{X}) - \nabla^2 \mathbf{X} \tag{3.12}$$

ここで、∇ の内積とそうでないものに気をつけてください。内積は前に述べた「発散」ですが、内積でないものは、$\nabla \mathbf{X} = (\partial X_x/\partial x, \partial X_y/\partial y, \partial X_z/\partial z)$ で、「勾配（gradient）」といいます。

　この証明は x 成分を計算し、

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \nabla \times \mathbf{X})_x &= \frac{\partial}{\partial y}(\nabla \times \mathbf{X})_z - \frac{\partial}{\partial z}(\nabla \times \mathbf{X})_y \\
&= \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial X_y}{\partial x} - \frac{\partial X_x}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial X_x}{\partial z} - \frac{\partial X_z}{\partial x}) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}) - (\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})X_x \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}) - (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})X_x \\
&= (\nabla(\nabla \cdot \mathbf{X}))_x - (\nabla^2 \mathbf{X})_x
\end{aligned}$$

他の成分も同様に計算できます。

3.5 磁場の基本法則

3.5.1 磁場に関するガウスの法則

さて、ビオ・サバールの法則

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \times \int \mathrm{d}^3\mathrm{x}' \frac{\mathbf{i}(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

に先ほど求めた式（3.11）を使うと、

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) = 0$$

が得られます。これは別に電流密度が時間変化している場合でも成り立って、

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0 \tag{3.13}$$

と一般化できます。これを「磁場に関するガウスの法則」といいます。これでマクスウェル方程式の二つ目が導けました。

3.5.2 微分形のアンペールの法則

さあ、残るもう一つ

$$\frac{1}{\mu_0}\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}\mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathrm{t})}{\mathrm{dt}} + \mathbf{i}(\mathbf{x}, t)$$

を得るためには、ビオ・サバールの法則に式（3.12）を使い、

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \times \nabla \times \int \mathrm{d}^3\mathrm{x}' \frac{\mathbf{i}(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\nabla(\nabla \cdot \int \mathrm{d}^3\mathrm{x}' \frac{\mathbf{i}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}) - \nabla^2 \int \mathrm{d}^3\mathrm{x}' \frac{\mathbf{i}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}\right]
\end{aligned}$$

　ここで、

$$\begin{aligned}
&\nabla \cdot \int \mathrm{d}^3\mathrm{x}' \frac{\mathbf{i}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\
= \; &\frac{\partial}{\partial x} \int \mathrm{d}^3\mathrm{x}' \frac{\mathrm{i_x}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} \int \mathrm{d}^3\mathrm{x}' \frac{\mathrm{i_y}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} \int \mathrm{d}^3\mathrm{x}' \frac{\mathrm{i_z}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}
\end{aligned}$$

において、$\partial|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-1}/\partial x = -\partial|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-1}/\partial x'$ を使い

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\int \mathrm{d^3x'}\frac{\mathrm{i_x}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} &= \int \mathrm{d^3x'}\mathrm{i_x}(\mathbf{x}')\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \\
&= -\int \mathrm{d^3x'}\mathrm{i_x}(\mathbf{x}')\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}'}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \\
&= -\int \mathrm{d^3x'}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}'}\left[\frac{\mathrm{i_x}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right] + \int \mathrm{d^3x'}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\frac{\partial \mathrm{i_x}(\mathbf{x}')}{\partial \mathrm{x}'}
\end{aligned}$$

ここで $\mathbf{i}(\mathbf{x}')$ の値が無限大にならないなら、

$$\int \mathrm{d^3x'}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\left[\frac{\mathrm{i_x}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right] = \int \mathrm{dy'dz'}\left[\frac{\mathrm{i_x}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right]_{\mathrm{x}'=-\infty}^{\mathrm{x}'=+\infty} = 0$$

となるので、結局、「定常電流の保存則」(3.2) を用いて

$$\nabla\cdot\int \mathrm{d^3x'}\frac{\mathbf{i}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = \int \mathrm{d^3x'}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\nabla'\cdot\mathbf{i}(\mathbf{x}') = 0$$

ただし、$\nabla' = (\partial/\partial x' + \partial/\partial y' + \partial/\partial z')$ よって

$$\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla^2\int \mathrm{d^3x'}\frac{\mathbf{i}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$$

となります。この積分の計算ですが、少々面倒なので、難しいようでしたら結果だけ見てください。まず、$\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}$ のとき

$$\begin{aligned}
\nabla^2\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \\
&= -\frac{3}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} + \frac{3[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^5} \\
&= -\frac{3}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} + \frac{3}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} \\
&= 0
\end{aligned}$$

となります。これを使うため、点 $\mathbf{x}$ 中心で半径が微少量 ε の球 V_ε とそれ以外の領域 V' に分けると

$$\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{x}) &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d^3x'}\nabla^2\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right)\mathbf{i}(\mathbf{x}') \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\int_{V_\varepsilon} \mathrm{d^3x'}\nabla^2\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right)\mathbf{i}(\mathbf{x}') + \int_{V'} \mathrm{d^3x'}\nabla^2\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right)\mathbf{i}(\mathbf{x}')\right]
\end{aligned}$$

ここで、V' では常に $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}$ なので、$\nabla^2\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right) = 0$ となり、消えてしまうので、問題は V_ε の積分だけになります。今、V_ε は極めて小さいので、その中だけを動く $\mathbf{x}'$ は限りなく $\mathbf{x}$ に近いので、$\mathbf{i}(\mathbf{x}') = \mathbf{i}(\mathbf{x})$ としてよいので

$$-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_\varepsilon} \mathrm{d^3x'}\nabla^2\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right)\mathbf{i}(\mathbf{x}') = -\frac{\mu_0}{4\pi}\mathbf{i}(\mathbf{x})\int_{V_\varepsilon} \mathrm{d^3x'}\nabla^2\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right)$$

さらに、$\partial|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-1}/\partial x = -\partial|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-1}/\partial x'$ より $\nabla^2|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-1} = \nabla'^2|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-1} = \nabla'\cdot(\nabla'|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-1})$ なので、

$$\begin{aligned}
-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_\varepsilon} \mathrm{d^3x'}\nabla^2\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right)\mathbf{i}(\mathbf{x}') &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\mathbf{i}(\mathbf{x})\int_{V_\varepsilon} \mathrm{d^3x'}\nabla^2\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right) \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\mathbf{i}(\mathbf{x})\int_{V_\varepsilon} \mathrm{d^3x'}\nabla'\cdot\left(\nabla'\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right)
\end{aligned}$$

ここで、ガウスの定理を使うと

$$
\begin{aligned}
-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_\varepsilon} \mathrm{d}^3\mathrm{x}'\nabla^2\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right)\mathbf{i}(\mathbf{x}') &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\mathbf{i}(\mathbf{x})\int_{V_\varepsilon} \mathrm{d}^3\mathrm{x}'\nabla'\cdot\left(\nabla'\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right) \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\mathbf{i}(\mathbf{x})\int_{S_\varepsilon} \nabla'\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\cdot\mathbf{n}'\mathrm{dS} \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\mathbf{i}(\mathbf{x})\int_{S_\varepsilon} \frac{-(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}\cdot\mathbf{n}'\mathrm{dS} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\mathbf{i}(\mathbf{x})\int_{S_\varepsilon} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2}\mathrm{dS} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\mathbf{i}(\mathbf{x})\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot 4\pi\varepsilon^2 \\
&= \mu_0\mathbf{i}(\mathbf{x})
\end{aligned}
$$

よって、

$$\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mu_0\mathbf{i}(\mathbf{x}) \tag{3.14}$$

が得られます。これがもうひとつの磁場の基本法則「微分形のアンペールの法則」といいます。しかし、ここの目的だったマクスウェル方程式の四つ目

$$\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \varepsilon_0\frac{\mathrm{d}\mathbf{E}(\mathbf{x},\mathrm{t})}{\mathrm{dt}} + \mathbf{i}(\mathbf{x},t)$$

とは似ているけどちょっと違いますね。まず右辺の第一項がないし、また時間 t を含む関数になっていません。微分形のアンペールの法則は時間変化がない「定常電流の保存則」を使って導かれたので、当然時間 t を含む形に一般化できません。実はそこが大きな問題なのです。それをどうするかは歴史的にも物理的にも大きな山場なので、あとのお楽しみにとっておいて、先に残ったマクスウェル方程式の三つ目を導きましょう。

Chapter 4

電磁誘導

4.1 ファラデーの電磁誘導の法則

前章では電流が流れると磁場が出来るということをやってきたのですが、ファラデーという人はこれの逆も成り立つんじゃないかと考え、コイルに囲まれた部分の磁場の量（磁束）が変化するとコイルに電流が流れることを発見しました。これを電磁誘導といいます。

さて、この現象を式にすると、電流が生じるというのはつまりコイルに起電力（電圧）ϕ がかかっているということなので、これが磁束 Φ の変化に比例しているので

$$\phi = -k\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{dt}} \tag{4.1}$$

となります。ここで k は比例定数ですが、起電力（電圧）ϕ の単位をボルト、磁束 Φ の単位をウェーバーとすると 1 になります。というより 1 になるように単位を決めたいうのが正しいですが。また右辺の負号は、磁束の変化を打ち消すような磁場が出来る向きに電流が生じることをわかりやすくするためです。

さて、ここで起電力とはコイルを一周したとき単位電荷の粒子が得るエネルギーなので

$$\phi = \int_{Cc} \mathbf{E}(\mathbf{s}, t)\mathrm{d}\mathbf{s}$$

と書け、磁束のほうは、コイルに囲まれた部分全体の磁場の量なので

$$\Phi = \int_{Sc} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})\mathrm{dS}$$

これから

$$\int_{Cc} \mathbf{E}(\mathbf{s}, t) \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_{\mathrm{Sc}} \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathrm{t}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})\mathrm{dS}$$

と書けるが、さてここで積分範囲の Cc, Sc はそれぞれコイルの周とその囲まれた面積だったわけですが、ファラデーはここで発想の大きな飛躍をします。というのは、ファラデーはこのコイルのあるなしに関われず、磁束の変化した空間に電場が発生するのだと考えたのです。そしてたまたまその発生した電場のあるところにコイルがあれば電流が流れる、と。そう考えると積分範囲は任意の C, S となり

$$\int_{C} \mathbf{E}(\mathbf{s}, t) \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_{\mathrm{S}} \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathrm{t}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})\mathrm{dS}$$

例によって例のごとくこの式を微分形にしたいのですが、ガウスの定理は使えない形なので、新しい定理を使います。

4.2 ストークスの定理

その新しい定理というのがストークスの定理なのですが、これは任意のベクトル $\mathbf{X}(\mathbf{x})$ に対して

$$\int_{C} \mathbf{X}(\mathbf{x}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\mathrm{S}} \nabla \times \mathbf{X}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})\mathrm{dS} \tag{4.2}$$

という関係が成り立つことです。ここで $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ は面 S の点 $\mathbf{x}$ における単位法線ベクトルです。このストークスの定理は C 上の線積分を面 S に対する面積分に書き換える公式で電磁気でガウスの定理と共に最も使われる定理ですので是非覚えておいてください。

さてこの証明ですが、少々面倒なので厳密にではなく感覚的にやりたいと思います。厳密な証明が知りたい人は他の電磁気の本を広げてください。

まず、簡単のため考える平面を図のように xy 平面上の微小な四角形とします。そして図の矢印の向きに C' に沿って線積分すると

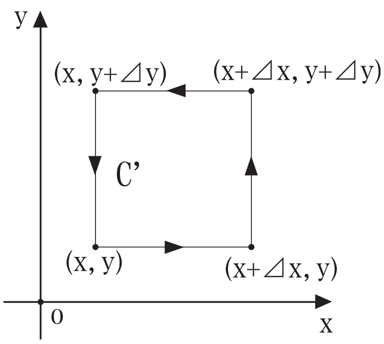

Figure 4.1: xy 平面上の微小な四角形

$$\begin{aligned}\int_{C'} \mathbf{X}(x,y)\cdot \mathrm{d}\mathbf{x} &= X_x(x,y)\Delta x + X_y(x+\Delta x,y)\Delta y + X_y(x,y)(-\Delta y) + X_x(x,y+\Delta y)(-\Delta x)\\ &= \left(\frac{\partial X_y(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial X_x(x,y)}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y\\ &= (\nabla\times\mathbf{X}(x,y))_z\Delta x\Delta y\end{aligned}$$

ここでまたガウスの定理と同じような感じに、任意の平面は図のように微小な四角形の足し合わせと書けるので、

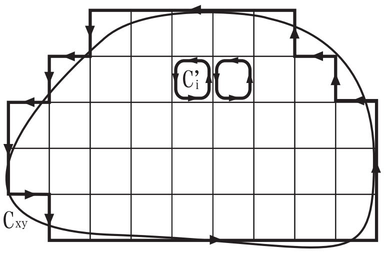

Figure 4.2: 微小な四角形の組み合わせで表せる任意の面

$$\begin{aligned}\int_{C_{xy}} \mathbf{X}(x,y)\cdot \mathrm{d}\mathbf{x} &= \Sigma_i \int_{C_i'} \mathbf{X}(x,y)\cdot \mathrm{dxdy}\\ &= \Sigma_i(\nabla\times\mathbf{X}(x,y))_z\Delta x\Delta y\\ &= \int_{S_{xy}} (\nabla\times\mathbf{X}(x,y))_z \mathrm{dS}\end{aligned}$$

よってこれでとりあえず xy 平面上では

$$\int_{C_{xy}} \mathbf{X}(x,y)\cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\mathrm{S_{xy}}} (\nabla\times\mathbf{X}(\mathrm{x},\mathrm{y}))_{\mathrm{z}}\mathrm{dS}$$

が言えた。当然同様にして yz, zx 平面上で

$$\int_{C_{yz}} \mathbf{X}(y,z)\cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\mathrm{S_{yz}}} (\nabla\times\mathbf{X}(\mathrm{y},\mathrm{z}))_{\mathrm{x}}\mathrm{dS}$$
$$\int_{C_{zx}} \mathbf{X}(z,x)\cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\mathrm{S_{zx}}} (\nabla\times\mathbf{X}(\mathrm{z},\mathrm{x}))_{\mathrm{y}}\mathrm{dS}$$

となります。感覚的には任意の閉曲面は xy, yz, zx 平面にまたがっているので、それぞれの足し合わせで

$$\int_C \mathbf{X}(\mathbf{x})\cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\mathrm{S}} \nabla\times\mathbf{X}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})\mathrm{dS}$$

となりストークスの定理が証明できました。

4.3 微分形のファラデーの法則

さて、このストークスの定理を使って

$$\int_C \mathbf{E}(\mathbf{s},t)\cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_{\mathrm{S}} \mathbf{B}(\mathbf{x},\mathrm{t})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})\mathrm{dS}$$

を微分形に直します。左辺にストークスの定理を使い、右辺の時間微分を積分の中に入れると

$$\int_S \nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{s},t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})\mathrm{dS} = -\int_{\mathrm{S}} \frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{x},\mathrm{t})}{\partial\mathrm{t}}\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})\mathrm{dS}$$

よってこれを S で微分し

$$\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{s},t) = -\frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{x},t)}{\partial t} \tag{4.3}$$

となります。これを「微分形のファラデーの法則」といいマクスウェルの方程式の三つ目です。

Chapter 5

アンペール・マクスウェルの法則

5.1 マクスウェルの方程式、最後の式

さて、ここまでに

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{x},t) &= \frac{\rho(\mathbf{x},t)}{\varepsilon_0} \\
\nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{x},t) &= 0 \\
\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{x},t) &= -\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}(\mathbf{x},\mathrm{t})}{\mathrm{dt}} \\
\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{x},t) &= \varepsilon_0\frac{\mathrm{d}\mathbf{E}(\mathbf{x},\mathrm{t})}{\mathrm{dt}} + \mathbf{i}(\mathbf{x},t)
\end{aligned}$$

である四つのマクスウェルの方程式のうち上三つが示せました。さて、残る

$$\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \varepsilon_0\frac{\mathrm{d}\mathbf{E}(\mathbf{x},\mathrm{t})}{\mathrm{dt}} + \mathbf{i}(\mathbf{x},t)$$

ですが、これは式（3.14）のアンペールの法則

$$\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mu_0\mathbf{i}(\mathbf{x})$$

にそっくりですね。これを時間も含む形に一般化してやって、あとは $\frac{\mathrm{d}\mathbf{D}(\mathbf{x},\mathrm{t})}{\mathrm{dt}}$ をくっつけてやればそのものですね。その

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{D}(\mathbf{x},\mathrm{t})}{\mathrm{dt}}$$

の項は「マクスウェルの変位電流」と呼ばれるものです。実は、ガウスの法則やファラデーの電磁誘導の法則をまとめた四つの式が「マクスウェルの方程式」と呼ばれているのは、マクスウェルがこの項を見つけて、整理したからなのです。なんだかずるい気もしますが、逆に言うとこの項がそれだけすごい発見だったわけです。

さて、この項をいかにして導入するかについてはまず、アンペールの法則が時間を含む形に一般化できなかったわけを思い出しましょう。それはアンペールの法則を導くのに時間を含まない「定常電流の保存則」（3.2）

$$\nabla\cdot\mathbf{i}(\mathbf{x}) = 0$$

を使っていたからでした。ので、まずは時間を含む電流を記述する式を何か考えなくてはいけません。

5.2 電荷保存則

定常電流でない時間を含む電流は保存されませんが、高校で習うように電荷の総量は保存されます。これは質量保存則のように突然電荷がきえたり現れたりしないという至極当たり前の法則です。

これから、時間を含む電流に関する式を導きたいと思います。いま、適当な空間 V を考えその V を囲む閉曲面 S を通って単位時間当たりに V から流れでる電荷の量は、電流の面積分

$$\int_S \mathbf{i}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})\mathrm{dS}$$

と書ける。また、空間 V の電荷密度 $\rho(\mathbf{x},t)$ に関して考えると、V の全電荷の減少量は

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_V \rho(\mathbf{x},t)\mathrm{dx}$$

とかけ、この二つが電荷保存則より等しいので

$$\int_S \mathbf{i}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})\mathrm{dS} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_{\mathrm{V}} \rho(\mathbf{x},\mathrm{t})\mathrm{d}^3\mathrm{x}$$

これを微分形に書き直すには、左辺にガウスの法則を使って

$$\int_S \mathbf{i}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})\mathrm{dS} = \int_{\mathrm{V}} \nabla\cdot\mathbf{i}(\mathbf{x},\mathrm{t})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})\mathrm{d}^3\mathrm{x}$$

また、右辺の時間微分を積分の中にいれると

$$\int_V \nabla\cdot\mathbf{i}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})\mathrm{d}^3\mathrm{x} = -\int_{\mathrm{V}} \frac{\partial\rho(\mathbf{x},\mathrm{t})}{\partial\mathrm{t}}\mathrm{d}^3\mathrm{x}$$

これを微分し

$$\nabla\cdot\mathbf{i}(\mathbf{x},t) = -\frac{\partial\rho(\mathbf{x},t)}{\partial t} \tag{5.1}$$

これが微分形で表した「電荷保存則」です。

5.3 マクスウェルの変位電流

さて、もう一度式(3.14)のアンペールの法則を見てみましょう。

$$\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mu_0\mathbf{i}(\mathbf{x})$$

これは時間 t を含む形には何度も言うように拡張できないんですが、ためしに無理やりやってみると

$$\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \mu_0\mathbf{i}(\mathbf{x},t)$$

しかし、これの発散を取ると

$$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \mu_0\nabla\cdot\mathbf{i}(\mathbf{x},t)$$

ベクトル解析の公式で $\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{X} = 0$ から

$$\nabla\cdot\mathbf{i}(\mathbf{x},t) = 0$$

となり、これは明らかに電荷保存則(5.1)

$$\nabla\cdot\mathbf{i}(\mathbf{x},t) = -\frac{\partial\rho(\mathbf{x},t)}{\partial t}$$

と矛盾してしまいます。

じゃあ、要するにこの電荷保存則を満たすようにアンペールの法則を拡張してやろうと思った(であろう)のがマクスウェルです。アンペールの法則を例のマクスウェルの変位電流の項を加えたものは

$$\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \epsilon_0\frac{\mathrm{d}\mathbf{E}(\mathbf{x},\mathrm{t})}{\mathrm{dt}} + \mathbf{i}(\mathbf{x},t)$$

ですが、さてこれの発散を同じように取ると

$$0 = \epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathrm{t})}{\mathrm{dt}} + \nabla \cdot \mathbf{i}(\mathbf{x}, t)$$

ここでガウスの法則 $\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t)$ を使うと

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) = 0$$
$$\nabla \cdot \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$$

となり、電荷保存則を満たします。

よってこれでアンペールの法則が時間に関して一般化でき、この式

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \epsilon_0 \frac{\mathrm{d}\mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathrm{t})}{\mathrm{dt}} + \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) \tag{5.2}$$

を「アンペール・マクスウェルの法則」といいます。これでようやくマクスウェルの方程式最後の式が得られました。

Chapter 6

マクスウェルの方程式の意味

長い道のりの末ようやくマクスウェルの方程式が全て揃いました。

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{x},t)&=\frac{\rho(\mathbf{x},t)}{\varepsilon_0}\\
\nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{x},t)&=0\\
\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{x},t)&=-\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}(\mathbf{x},\mathrm{t})}{\mathrm{dt}}\\
\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{x},t)&=\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}\mathbf{E}(\mathbf{x},\mathrm{t})}{\mathrm{dt}}+\mathbf{i}(\mathbf{x},t)
\end{aligned}$$

けれどだらだらと証明ばかりで結局この４つの式が何を表しているのかが掴みにくかったかと思うので、復習がてらマクスウェルの方程式の意味について考えていきます。

6.1　ガウスの法則と発散のイメージ

さてガウスの法則と磁場に関するガウスの法則

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{x},t)&=\frac{\rho(\mathbf{x},t)}{\varepsilon_0}\\
\nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{x},t)&=0
\end{aligned}$$

はそれぞれ電場 $\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$、磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{x},t)$ に $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$ をかけたものです。これは電場 $\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$、磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{x},t)$ の「発散」といいます。しかしこれがなんで「発散」なんだ？と感じるかもしれません。数学的には１章でやった「ガウスの定理」式（2.10）によるんですが、ここでは数学的厳密性は置いといてもう少し感覚的にこの「発散」について考えてみます。

まず、簡単のため１次元で考えます。ある量 $Q(x)$ があって、これが $Q=1$ だけあるとベクトル量 $\mathbf{X}(x)$ を量１だけ放出（発散）するものとします。つまり Q は発生源のようなもので、$\mathbf{X}$ がその出ていくもので、ライトと光あるいは蛇口と水の流れ、または電荷と電場のような関係です。

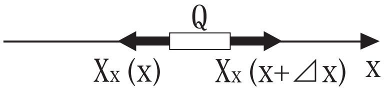

Figure 6.1: １次元の発散

さてこの Q の長さに対しての密度、線密度が $q(x)$ であるとし、図のようにある短い長さ Δx だけ Q があるときそこから放出される $\mathbf{X}(x)$ の量は当然その Q の量で

$$q(x)\Delta x$$

ですが、ここで $\mathbf{X}(x)$ を調べて Δx から出ていく量を求めると

$$\mathbf{X}(x+\Delta x)-\mathbf{X}(x)$$

ですね。よって

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(x+\Delta x)-\mathbf{X}(x) &= q(x)\Delta x\\ \frac{\mathbf{X}(x+\Delta x)-\mathbf{X}(x)}{\Delta x} &= q(x)\end{aligned}$$

さてこれは $\Delta x \to 0$ とすればまさに微分で

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{X}(\mathrm{x})}{\mathrm{dx}} = q(x)$$

これが 3 次元なら、もう 2 方向ぶん足し合わせ、線密度は体積密度にすればいいので

$$\left(\frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{x})}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{x})}{\partial y}+\frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{x})}{\partial z}\right) = q(\mathbf{x})$$

となり、これはまさに

$$\nabla\cdot\mathbf{X}(\mathbf{x}) = q(\mathbf{x})$$

で $\mathbf{X}(\mathbf{x})$ の発散となりました。

さて、これでどうして $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$ をかけたものが「発散」なのかなんとなくわかってもらえたかと思いいます。そこであらためてガウスの法則と磁場に関するガウスの法則を見てみると

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{x},t) &= \frac{\rho(\mathbf{x},t)}{\varepsilon_0}\\ \nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{x},t) &= 0\end{aligned}$$

ガウスの法則はつまり電荷 1 に対して電場が ε_0 だけでていくことを意味していて、磁場に関するガウスの法則では磁場は「発散」していかない、ということを表していることが式からイメージできるかと思います。

電場に関してはなんだか当たり前のことを意味しているんだなという印象ですが、磁場に関しては「発散」していかないというのが変な感じですよね。これだとまるで磁場ができないように感じるかもしれませんがもちろんそうではありません。磁場を水の流れに例えるなら、今存在しないといっているのは蛇口、または排水溝です。決して水自体がないとは言っていません。蛇口と排水溝を使わずにプールに溜まった水に流れを作るには、小学校の水泳の時間にやったようにプールの中を「回転する」流れにしてやればいいんです。つまり、「磁場には始点や終点はなくすべてループになっている」というのが磁場に関するガウスの法則が示すものなのです。これで、この二つの法則についてイメージできたかと思います。ややこしい数学で導いた式ですが意味しているのは単純なイメージなんです。

6.2 回転のイメージ

さて残りのマクスウェルの方程式 2 つは

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{x},t) &= -\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}(\mathbf{x},\mathrm{t})}{\mathrm{dt}}\\ \frac{1}{\mu_0}\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{x},t) &= \varepsilon_0\frac{\mathrm{d}\mathbf{E}(\mathbf{x},\mathrm{t})}{\mathrm{dt}}+\mathbf{i}(\mathbf{x},t)\end{aligned}$$

ですが、まあ、電流と時間微分はいいとしてこの 2 式でイメージできないのは $\nabla\times$ という ∇ の外積ですね。これは別名「回転（rotation）」というくらいなので、回転を表しているんですが、なぜこれが回転なの？と感じることでしょう。もちろん数学的には 3 章の「ストークスの定理」式（4.2）からということなんですがそれじゃあわかりずらいので、また感覚的に見ていきたいと思います。

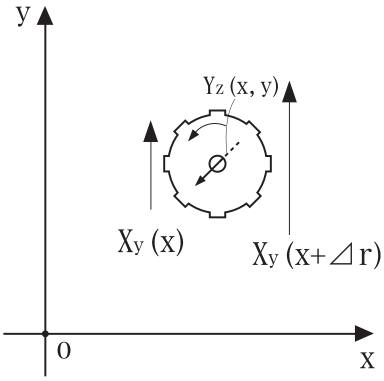

Figure 6.2: 回転のイメージ

この「回転（rotation）」のイメージは直径 Δr の小さな水車のような感じです。水車が回ると右ねじの進む方向にその水車に仕掛けられたものを押し出すようにできています、またその逆にも動きます。まあ、とりあえず xy 平面にこの水車を置いてみましょう。水の流れは $\mathbf{X}(\mathbf{x})$ で表します。

さて、この水車を図の方向に回すためには水車の右で下（$+y$）方向、あるいは左で上（$-y$）方向の流れがあればいいですね。左右に水流があるならその水流に差があれば水車はゆっくりですが回りますよね。つまり

$$X_y(x+\Delta r) - X_y(x)$$

が正ならば回るわけです。また水車の上で右（$-x$）方向、あるいは下で左（$+x$）方向の流れがあっても図の方向に回るので

$$-X_x(y+\Delta r) + X_x(y)$$

も水車を回転させます。よって

$$X_y(x+\Delta r) - X_y(x) - (X_x(y+\Delta r) - X_x(y))$$

が水車を回転させる力です。水車が回るのはトルクですからこれを直径で割ったものが水車が押し出すものの量です。押し出すものを $\mathbf{Y}(\mathbf{x})$ とすると

$$\frac{X_y(x+\Delta r) - X_y(x)}{\Delta r} - \frac{X_x(y+\Delta r) - X_x(y)}{\Delta r} = Y_z(\mathbf{x})$$

であり、これで $\Delta r \to 0$ とすれば

$$\frac{\partial X_y(\mathbf{x})}{\partial x} - \frac{\partial X_x(\mathbf{x})}{\partial y} = Y_z(\mathbf{x})$$

となり、これはまさに $(\nabla \times \mathbf{X}(\mathbf{x}))_z = \frac{\partial X_y(\mathbf{x})}{\partial x} - \frac{\partial X_x(\mathbf{x})}{\partial y}$ です。x, y 成分についても同様です。これでなんとなくなぜ「回転」が回転なのかのイメージが掴めてもらえたかと思います。

さて、改めてあの 2 式を見てみましょう。まず、ファラデーの法則ですが

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathrm{t})}{\mathrm{dt}}$$

これはつまり単純に磁場が変化するとその周りにぐるっと電場が出来る、ということです。そしてマクスウェル・アンペールの法則は

$$\frac{1}{\mu_0}\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}\mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathrm{t})}{\mathrm{dt}} + \mathbf{i}(\mathbf{x}, t)$$

電流と変化する電場の周りに磁場が出来るということを表しているわけです。こうやってイメージでマクスウェルの方程式を捉えてみると、単純でわかりやすい式であることがわかってもらえたでしょうか？

Chapter 7

電磁波

7.1 電磁波の波動方程式

さて、マクスウェル方程式の応用として電磁波を考えて見ましょう。まず、電流、電荷が共にない空間（自由空間といいます）を考えるとマクスウェル方程式は

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = 0 \tag{7.1}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0 \tag{7.2}$$
$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathrm{t})}{\mathrm{dt}} \tag{7.3}$$
$$\frac{1}{\mu_0}\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}\mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathrm{t})}{\mathrm{dt}} \tag{7.4}$$

となりますね。ここでちょっと式（7.3)、（7.4）を見てみましょう。式（7.2）からわかるように電場 E が時間変化するときその周りに磁場 B ができます。また式（7.3）からその出来た磁場 B からまた電場 E ’が出来ます。これが無限に繰り返されるのでどんどん遠くまで電場磁場が到達します。これがつまり電磁波です。もし

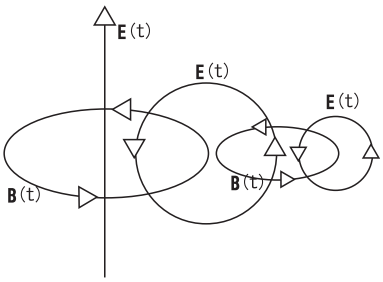

Figure 7.1: 電磁波のイメージ

式（7.4）のマクスウェルの変位電流 $\varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}\mathbf{E}(\mathbf{x},\mathrm{t})}{\mathrm{dt}}$ がなかったら当然この連鎖は続きません。マクスウェルの偉大さはなんといってもこの項をいれ、そして電磁波を予想したことでしょう。さて、ではこの電磁波をちゃんと数学で書いてみましょう。式（7.4）に左から $\nabla\times$ をかけてやると

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$$

ここでベクトル解析の公式（3.12）より

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) - \nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$$

また、式（7.1）より

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = 0$$

なので、結局

$$-\nabla^2\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{x},t)$$

一方式（7.4）より

$$\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \varepsilon_0\mu_0\frac{\mathrm{d}\mathbf{E}(\mathbf{x},\mathrm{t})}{\mathrm{dt}}$$

なので最終的に

$$(\nabla^2 - \varepsilon_0\mu_0\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dt}^2})\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = 0 \tag{7.5}$$

という式が得られます。実はこの式は波動方程式という一般に波を表す式の形なのです。磁場についても式（7.4）から同じようにして

$$(\nabla^2 - \varepsilon_0\mu_0\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dt}^2})\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = 0 \tag{7.6}$$

が得られます。さてこれらが実際に波を表しているか見てみましょう。

7.2 波動方程式の解

波動方程式の解というと、例えば

$$\mathbf{E}(x,t) = f(t-\frac{x}{v})$$

と言うものがあります。これは図のように適当な関数 f が時間 t 進むと v だけ x 方向に進んでいく「波」のことを意味しています。
 さて、これを試しに式（7.5）代入してみましょう。

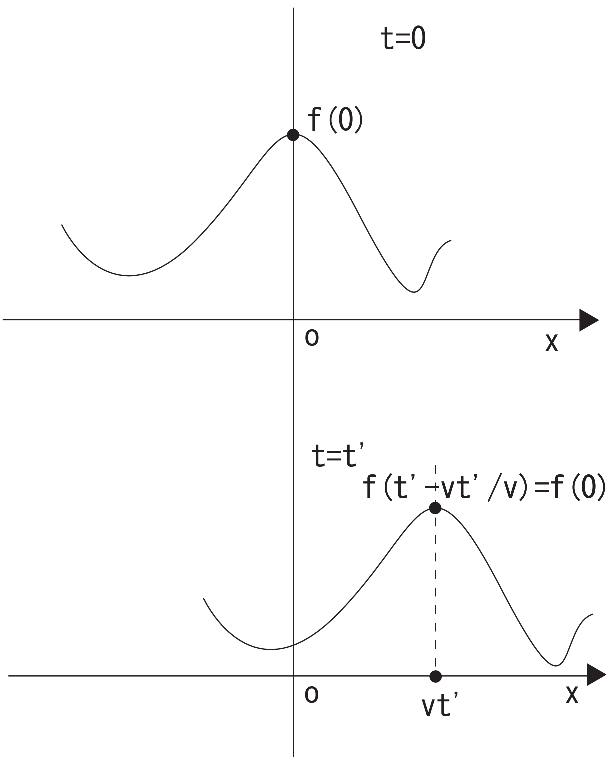

Figure 7.2: 波動関数の解の例

$$(\nabla^2 - \varepsilon_0\mu_0\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dt}^2})\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = 0 \tag{7.7}$$

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dt}^2})f(t-\frac{x}{v}) = 0 \tag{7.8}$$
$$\frac{1}{v^2}f(t-\frac{x}{v}) = \varepsilon_0\mu_0 f(t-\frac{x}{v}) \tag{7.9}$$

これから、つまり電磁波の方程式は速度ｖが $\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}}$ であることがわかります。じつはこの値 $sqrt\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0} = 3\times 10^8[m/s^2]$ は実験で測られた光の速度と非常によく一致します。これはつまりどういうことかといえば、「光は電磁波、電磁波は光」だったというわけなのです。

7.3 マクスウェル方程式の問題と相対論

前章で光速が $3\times 10^8[m/s^2]$ と求まったわけですが実はこれにはある問題が隠れています。聡明な人なら気づいたかもしれませんがその問題とは

「この光の速度は何に対しての速度なのか？」

というものです。電磁波というくらいですからまず一般の波の場合を考えてみましょう。さて普通波の速度とは媒質に対しての速度です。例えば空気中の音波なら空気からみてどれくらいの速度かいうのが音速です。海の波なら海面に対してです。船かなんかで海面を突っ切れば波を追い越したりできますよね。では電磁波、光の場合はどうでしょう？媒質はといえば…特に思いつきませんね。電磁波は電場、磁場が交互にできるものですから媒質というとこの電場、磁場の媒質ですがそんなものは特に考えてきませんでした。そこで昔の人はこの媒質に「エーテル」という名前をつけ光速はこれに対しての速度だと考えました。さて、そうなればこのエーテルを探そうとさまざまな人たちががんばりました。そこで地球も宇宙空間、すなわちエーテル内を移動しているわけだから、それによって光速度に違いがでるだろうと高精度の実験（「マイケルソン・モーレーの実験」）を行いましたが、その結果は意外にも「光速度に違いはない」というものだったのです。さてこの結果をどう考えるべきかいらいろな人がいろいろなことを考えましたがここでかのアインシュタインは、実にシンプルに

「光速度に違いはないのはつまりエーテルは存在しない。光速度は何に対しても同じなのだ」

と考えたのです。この前提（光速度不変）からあの有名な相対論が作られました。

相対論についてもいずれ書きたいと思います。