はじめに

「力学」とは、一言でまとめれば物の運動を予測できるよう、数学で記述したもの。
これはまさに物理の祖、あるいは科学の祖といえるかもしれません。
その「力学」を自己の頭の整理も兼ね、これから物理を勉強する方（高校生以上から大学１、２回生）を想定し、なるべくわかりやすくまとめたのがこのページです。いかんせん、ただの素人の書き物ですからミスなどはご容赦を。目標としては、なんだか数学をないがしろにして物理の面白さを削ってしまっているような高校教科書を改め、そしてとっつきにくい大学の本との橋渡し・導入書のようなものを目指しています。

さて本題に戻りますが、そのニュートンの（古典）力学は三つの公理からなります。公理と言うのは理論の大前提、最低限の仮定や実験事実のことです。ニュートンの力学は

- 慣性の法則
- 作用反作用の法則
- 運動方程式

の三つが公理です。この三つから理論をふくらませていくわけです。なのでとりあえずこれらを詳しく見ていきましょう。

おおもと、あるいは全てといってしまえるかもしれないのがあの有名な「ニュートンの運動方程式」です。非常にシンプルな式に物体の運動をまとめてしまったこの方程式こそ近代物理の誕生を告げるにふさわしい美しいものですが、実際解くのは結構めんどうだったりします。このめんどさに立ち向かった結果、数学でのベクトルや微分、積分の分野を発展させてきたのです。とにもかくにもまずはさっそくこの「運動方程式」を見ていきましょう。

Chapter 1

ニュートン力学の三つの公理

1.1　ニュートンの運動方程式

「力学」とは力について考える学問です。さてその力とはなんでしょう？その疑問の答えのためにちょっと歴史を追ってみましょう。

「力学」の歴史はまず、ガリレイの等速直線運動の原理（「慣性の法則」）から起こります。これは「物体は何もされなければ等速で真っ直ぐに動き続ける」というものです。（実はちょっと違うのですがあとで述べます）普段の感覚からいくと動かすことにこそなにか力が要りそうですが、勝手に物が止まってしまうのも地面なんかとこすれてしまうからなんです。つまり、物体に「何かして等速から変化させるもの」こそが「力」なわけです。さてその力 F が大きければ大きいほど速度が変化するわけなんで、速度の変化分＝加速度 a を使って

$$F \propto a$$

と書けることにしましょう。さて比例関係なんで適当な比例係数 m をとってやれば

$$F = ma \tag{1.1}$$

とかけます。どっかで見たことある式になったかと思いますが、これがニュートンの運動方程式です。自然な形ではありますがつまりこれは力を定義する式だったわけです。それゆえ公理のひとつなわけです。さて、今比例係数 m は適当にとったものであり、質量でも何でもありません。が実はこれが物の重さ（重力質量）と一致するので（あとで述べます）m が質量になり完全に教科書に載っている形になったかと思います。

1.2　慣性の法則

先ほど「慣性の法則」＝「物体は何もされなければ等速で真っ直ぐに動き続ける」といいましたが、それなら運動方程式

$$F = ma$$

から F=0 とすれば a=0、つまり等速直線運動で運動方程式から示せるのでわざわざ公理のうちにいれなくても運動方程式だけで十分になってしまいます。実は慣性の法則にはもうひとつ、そしてそちらのほうがより重要なものがあるのです。

それは「あらゆる慣性系で物理法則は変わらない」というものです。慣性系というのは等速直線運動しているものの集団のようなものです。例えば新幹線の車内とか地球上（厳密には地球は円運動なんで違うのですが半径が大きいので近似的に等速直線運動とします）だとかです。もし慣性系によって物理法則が違ったなら、火星と地球で別々の物理を作らなきゃいけなくなったりしていまったり、また地球上、あるいは太陽系で実験している限り永遠に宇宙全体の法則を理解できないということになり、我々が地球人である以上やむをえない最低限の仮定であり、また宇宙でそんなご当地ルールがあるのはなんだか不自然ですよね。

そんなわけでこの「慣性の法則：あらゆる慣性系で物理法則は変わらない」という公理は実はニュートン力学に留まらず相対論・量子力学にいたる物理全体の重要な公理であり現在実験的にもこれを破る事実は見つかっていません。

1.3　作用・反作用の法則

三番目最後の公理に作用・反作用の法則があります。これは「力は同時に同じ大きさで反対向きのものと対になって働く」というものです。
　例えば真っ暗な宇宙空間で物体 A が物体 B とぶつかって離れるという現象があったとき、

- A から見ると、自分は止まっていて B が近づいてきてぶつかったので B から力を加えられて A が飛ばされたように見えます。
- B からは A が飛んできて、ぶつかったので A から力を加えられて自分が飛ばされたように見えるでしょう。
- 離れたところから見ていた C からは A と B が共に近づいて、そしてお互いに力をかけ合ってまた離れたように見えるでしょう。

　さて結局どちらがどっちに力を加えたのでしょうか？慣性の法則より等速直線運動である限り A,B,C どれから見たものとも矛盾しない形にしなくてはいけません。とすると

- A は B から力を受けた（A から見たとき）
- B は A から力を受けた（B から見たとき）
- A と B ともに力を受けた（C から見たとき）

から矛盾のないのは「力は A と B 同時に同じ大きさで反対向きのものが対になって働いたとき」なわけです。

さて公理が三つそろったところで、次に具体的な問題についていろいろ求めてみましょう。

Chapter 2

微分方程式としての運動方程式

さて、高校ではこれで終わりでこの運動方程式を直接計算することは少ないかと思います。それにはこの書き方に問題があるのです。質量はこれでいいとして、まず力 F は当然方向を持った量、そうベクトルなので $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ としておかなければなりません。ここで $\mathbf{F}$ という太字はその量がベクトルである、という意味です。 またそもそも加速度とは速度の微分、そして速度は物体の位置 $\mathbf{r}$ の微分でしたね。よってニュートンの運動方程式は

$$\mathbf{F} = m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{dt}^2} \tag{2.1}$$

と書き改められます。さて、これの何が変わったんだといわれると、一番は力 $\mathbf{F}$ と物体の位置 $\mathbf{r}$ の方程式になっています。つまり力が分かれば物体の位置がわかるわけです。ただし問題は物体の位置 $\mathbf{r}$ が二回微分になっていることです。このような微分のある式を微分方程式と呼びます。この微分方程式を具体的にどう解くのかひとつ例を出します。

2.1　地上付近での重力下の運動

地上付近での重力は一様で鉛直下方向に mg です。m は質量、g は重力定数です。さて、鉛直上方向を y 軸の向きとすると運動方程式は

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}}{\mathrm{dt}^2} &= -mg \\ \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}}{\mathrm{dt}^2} &= -g \end{aligned}$$

となります。さて、微分方程式を解く方法の最もシンプルなものは積分することです。この式を早速積分してみましょう。

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}}{\mathrm{dt}^2}\mathrm{dt} &= \int -g\mathrm{dt} \\ \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} &= -gt + C_1 \end{aligned}$$

まだ微分が残っているのでもう一度積分し

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}}\mathrm{dt} &= \int -gt + C_1\mathrm{dt} \\ y &= -gt^2 + C_1 t + C_2 \end{aligned}$$

となります。さてここで C_1, C_2 てのが突然出てきましたがこれはいわゆる積分定数です。二回微分なので運動方程式を解くと必ずこの積分定数が二つ出てきます。この積分定数はどうやって決まるの？という疑問が当然浮かぶと思いますが、それは最初の状態がどうなっているのか、初期条件によって決まります。初期条件と

いうのはある時間の物体の位置と速度というのが一般的です。つまり最初にどこからどのくらいの速さで投げるのかといった情報です。たとえば今の場合、$t=0$ で

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ \frac{\mathrm{dy(0)}}{\mathrm{dt}} &= g \end{aligned}$$

だとすると、

$$\begin{aligned} C_1 &= g \\ C_2 &= 0 \end{aligned}$$

となり

$$y(t) = -gt(t+1)$$

という放物線軌道が得られます。

2.2 単振動

こんな調子でばねによる単振動を今度は解いてみましょう。ばねの力はばね係数 k とばねの自然長からの変位 x の積 $-kx$ で表されますので運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d^2x(t)}}{\mathrm{dt^2}} = -kx(t)$$

となります。さてこれを解くのにまた積分しようかといきたいところですが求めるべき $x(t)$ が右辺にも入っていてなんだかにっちもさっちもいきません。じゃあ、どうしようかいうと当てずっぽうで $x(t)$ の形を予測していきます。実は微分方程式を解く方法で最も有力な方法が当てずっぽうです。なんて頼りないんだと感じるでしょうが事実なので仕方ありません。二次方程式のように絶対的な公式なんかはありません。それゆえ、微分方程式は解けない（解けていない）もののほうが多いんです。解ける微分方程式は特殊なものいってもいいでしょう。

さて、今回の場合 $x(t)$ の二回微分が $-x(t)$ になるようなもの。それは実は三角関数 $\sin\omega t, \cos\omega t$ です。ためしに突っ込んでみましょう。

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d^2\cos\omega t}}{\mathrm{dt^2}} &= -k\cos\omega t \\ -m\omega^2\cos\omega t &= -k\cos\omega t \\ \omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}$$

と $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ とすればちゃんと満たしていることがわかりますね。$\sin\omega t$ も同様に満たします。ただ、これを定数倍したもの $C_1\cos\omega t$ もまたその足し合わせ $C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$ も運動方程式を満たします。そう、実はこの定数が二つある最後の形が一般の解なのです。この式を

$$\begin{aligned} & C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t \\ = \;& \sqrt{C_1^2+C_2^2}\left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\cos\omega t + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\sin\omega t\right) \\ = \;& C(\cos\alpha\cos\omega t + \sin\alpha\sin\omega t) \\ = \;& C\cos(\omega t - \alpha) \\ & \left(C = \sqrt{C_1^2+C_2^2}, \cos\alpha = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}, \sin\alpha = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\right) \end{aligned}$$

と書き直すと単振動であることがよく分かると思います。C, α については初期条件によります。

Chapter 3

運動方程式の積分と保存量

さて、先ほど述べたように運動方程式は微分方程式なので滅多に解けません。それではあんまりなので運動方程式をあれこれうまく変形して一部でも積分して時間変化しないうまい量を考え出しました。それを保存量といい、実は高校でならった運動量やエネルギーがそうなのです。高校では突然に定義されたこれらの量ですが、どう運動方程式をいじると出てくるのか実際に見てみましょう。

3.1 運動量

運動量という量は高校でお馴染みかもしれませんが、なぜ運動量の変化が力と時間の積なのか、そもそも運動量ってなんなんだろうかと疑問に思った人もいるかと思います。そんな疑問にひとつの答えを示したいと思います。まず、とにかく運動方程式を時間で積分してみます

$$\begin{aligned}\int m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{dt}^2}\mathrm{dt} &= \int \mathbf{F}\mathrm{dt} \\ m\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{dt}} &= \int \mathbf{F}\mathrm{dt} \\ m\mathbf{v} &= \int \mathbf{F}\mathrm{dt}\end{aligned}$$

さて、これから運動量 $m\mathbf{v}(t)$ が力と時間の積（正確には積分）であることはわかりました。ただなんでこんな量を新たに考えるのかといえば、単純に「便利」だからです。どう便利なのかというと、このあの有名な「運動量保存則」があるからです。どういうことが具体的に計算してみましょう。

今二つの物体があって、特に重力などの力がかかっていない場合を考えます。そして時間 $t_1 \leq t \leq t_2$ の間、互いに衝突して力を受けたとします。このとき作用・反作用の法則よりお互いが受けた力は向きが逆で大きさが一緒であることはわかります。さて、この受けた力はそれぞれ

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{1\to 2} &= \begin{cases} \mathbf{f}(t) & (t_1 \leq t \leq t_2) \\ 0 & (t \leq t_1, t \geq t_2) \end{cases} \\ \mathbf{F}_{2\to 1} &= \begin{cases} -\mathbf{f}(t) & (t_1 \leq t \leq t_2) \\ 0 & (t \leq t_1, t \geq t_2) \end{cases}\end{aligned}$$

と書きます。するとそれぞれの運動方程式は

$$\begin{aligned}m\frac{\mathbf{v}_1(t)}{\mathrm{dt}} &= \mathbf{F}_{2\to 1} \\ m\frac{\mathbf{v}_2(t)}{\mathrm{dt}} &= \mathbf{F}_{1\to 2}\end{aligned}$$

これを $t_1 \leq t \leq t_2$ の間で積分すると

$$m\mathbf{v}_1(t_2) - m\mathbf{v}_1(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}(t)\mathrm{dt}$$

$$m\mathbf{v}_2(t_2) - m\mathbf{v}_2(t_1) = -\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}(t)\mathrm{dt}$$

よって

$$m\mathbf{v}_1(t_2) + m\mathbf{v}_2(t_2) = m\mathbf{v}_1(t_1) + m\mathbf{v}_2(t_1) \tag{3.1}$$

が得られます。これから衝突前と衝突後で全体の運動量 $m\mathbf{v}_1 + m\mathbf{v}_2$ は変化しない、という事が言えます。つまり物体にお互いの衝突による力以外の重力などの力（外力）がかかっていなければ、運動量は変わらないという「運動量保存則」が得られます。こんな風になかなか解けない運動方程式を少しでも扱いやすくするため、運動量のような時間で変化しない量、「保存量」を式をいじって見つけたかったのです。保存量を計算すれば直接微分方程式を解かなくても（高校物理でお馴染みのように）ある程度情報を得ることができます。こういった意味では「運動量は単なる計算の都合上、考え出されたもの」といってもいいでしょう。ただこの「都合上の量」が物理の本質に関わっていたのです。

3.2 エネルギー

もうひとつ有名な保存量として忘れちゃいけないのがエネルギーです。なぜエネルギーは保存するのか？そもそもエネルギーってなにか？という問いのひとつの答えとして「単なる運動方程式の保存量の一つ」とも言えるでしょう。高校ではエネルギーとは「力と距離の積」と習いましたが、なぜそんな量を考えるのか、なぜその量は保存するのか？という疑問が残ったかと思います。それを解決したいと思います。

まず、運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}} = \mathbf{F}$$

の両辺に $\mathbf{v}(t)$ をかけます。これを時間で積分すると

$$\begin{aligned}\int m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}} \cdot \mathbf{v}(t)\mathrm{dt} &= \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}(t)\mathrm{dt} \\ \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2(t)\right)\mathrm{dt} &= \int \mathbf{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{dt}}\mathrm{dt} \\ \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2(t) &= \int \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\end{aligned}$$

さてこれで高校で習ったなつかしの運動エネルギー $\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2(t)$ が確かに力と距離の積（積分）であることはわかりました。ではこれがなんで保存するのかを述べるのにまず、次に述べる「ポテンシャルエネルギー」というものを考えます。

3.2.1 ポテンシャルエネルギー

さて、力 $\mathbf{F}$ の積分ができたとすると

$$\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{Q}(\mathbf{r}) - \mathrm{Q}(\mathbf{r}_0)$$

と書けますね。（これは当たり前のようですが実は力 $\mathbf{F}$ も距離 $\mathbf{r}$ も今はベクトル量なので、数学的にはむしろこんな形にかけることは珍しいんです。ただ現在見つかっている基本的な力はみなこうかけるのでここでは詳しく突っ込みません、ちなみにこうかける力のことを特に「保存力」と呼びます）今、のちのちのため $Q(\mathbf{r}) = -U(\mathbf{r})$ とマイナスをつけたものを考え、これを「ポテンシャルエネルギー」と呼びます。つまりポテンシャルエネルギーとは力の距離積分したものにマイナスをつけたものです。（実はポテンシャルエネルギーとは高校での位置エネルギーです）また、逆にポテンシャルエネルギーから力は、マイナスつけて微分すればいいので

$$-(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}) = \mathbf{F}(\mathbf{r})$$

となります。これだと長ったらしいので以下のような省略記号をよく使います。

$$(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}) = \nabla U(\mathbf{r})$$

この ∇ は「ナブラ（nabla）」と読みます。

3.2.2 エネルギー保存則

さて、このポテンシャルエネルギーを使いもう一度運動方程式を先ほどのように積分します。

$$
\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}}\cdot\mathbf{v}(t)\mathrm{dt} &= \int_{t_1}^{t_2}\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}(t)\mathrm{dt} \\
\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2(t)\right)\mathrm{dt} &= \int_{t_1}^{t_2}\mathbf{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{dt}}\mathrm{dt} \\
\frac{1}{2}m\mathbf{v}_2^2(t)-\frac{1}{2}m\mathbf{v}_1^2(t) &= \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} \\
&= -U(\mathbf{r}_2)+U(\mathbf{r}_1)
\end{aligned}
$$

よって

$$\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2(t_2)+U(\mathbf{r}_2)=\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2(t_1)+U(\mathbf{r}_1) \tag{3.2}$$

これから $E=\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2+U(\mathbf{r})$ が時間で変化しない、エネルギー E が保存することがわかりました。この考え方からいえばエネルギーもまた運動方程式を解くために計算が楽になるよう定義した道具の一つといえるでしょう。

3.3 角運動量

つづいて角運動量というものを導入しますがそのためにまず、ベクトル積というものを考えます。

3.3.1 ベクトル積

いま、ベクトル $\mathbf{A},\mathbf{B}$ があるとします。そのベクトル積は $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ と書き、これは大きさが $AB\sin\theta$ で、方向が $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ に垂直で $\mathbf{A}$ から $\mathbf{B}$ に回して右ねじが進む方向を向いているベクトルです。つまり、それぞれの単位ベクトル $\mathbf{e}_x,\mathbf{e}_y,\mathbf{e}_x$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{e}_x\times\mathbf{e}_y=\mathbf{e}_z \\
&\mathbf{e}_y\times\mathbf{e}_z=\mathbf{e}_x \\
&\mathbf{e}_z\times\mathbf{e}_x=\mathbf{e}_y \\
&\mathbf{e}_x\times\mathbf{e}_x=\mathbf{e}_y\times\mathbf{e}_y=\mathbf{e}_z\times\mathbf{e}_z=0
\end{aligned}
$$

が成り立ちます。これから、$\mathbf{A}=A_x\mathbf{e}_x+A_y\mathbf{e}_y+A_z\mathbf{e}_z,\mathbf{B}=B_x\mathbf{e}_x+B_y\mathbf{e}_y+B_z\mathbf{e}_z$ は

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=(A_yB_z-A_zB_y)\mathbf{e}_x+(A_zB_x-A_xB_z)\mathbf{e}_y+(A_xB_y-A_yB_z)\mathbf{e}_z$$

と書けます。

さて、運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{dt}^2}=\mathbf{F}$$

に左から先程のベクトル積 $\mathbf{r}\times$ をかけると

$$m\mathbf{r}\times\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{dt}^2}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}$$

さて、この左辺は、角運動量

$$L=m\mathbf{r}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{dt}} \tag{3.3}$$

の微分

$$\frac{\mathrm{dL}}{\mathrm{dt}}=m\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{dt}}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{dt}}+m\mathbf{r}\times\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{dt}^2}=m\mathbf{r}\times\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{dt}^2}$$

と等しいです。ここで $\mathbf{A}\times\mathbf{A}=0$ を使いました。つまり先程の式は

$$\frac{\mathrm{dL}}{\mathrm{dt}}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}$$

となります。この右辺の $\mathbf{r}\times\mathbf{F}$ を「トルク」と呼びます。さて、こんな量を考えて何がうれしいかというと世の中の基本的な力はみな「中心力」という力です。これはどんな力かというと、ある一点から引っ張られたり反発したりする力です。例えば太陽に引っ張られる重力です。数学でいえばある一点（例えば太陽）を原点とすると $\pm\mathbf{r}$ の方向をもった力のことです。例えば太陽との重力は

$$-\frac{GmM}{|\mathbf{r}|^2}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

と書けます。ここで M は太陽の質量、$\mathbf{r}$ が太陽からの距離です。さて、この中心力の場合 $\mathbf{F}=\alpha\mathbf{r}$ となるので、トルクは

$$\mathbf{r}\times\mathbf{F}=\mathbf{r}\times\alpha\mathbf{r}=\alpha\mathbf{r}\times\mathbf{r}=0$$

なので

$$\frac{\mathrm{dL}}{\mathrm{dt}}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}=0$$

よって中心力では

$$L=m\mathbf{r}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{dt}}=C \tag{3.4}$$

と角運動量は保存されます。高校ではなじみのないこの保存量ですが、物理の概念としてとても重要な量です。

Chapter 4

惑星の運動

さて、今までに出した保存則をうまく使ってニュートン運動方程式の花形、惑星の運動を考えて見ましょう。今太陽は充分重いのでその位置は動かないで原点にあると仮定して考えていきます。M を太陽の質量、$\mathbf{r}$ を太陽からの距離、惑星の質量を m とすると運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{dt}^2} = -\frac{GmM}{|\mathbf{r}|^2}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \tag{4.1}$$

となります。ここで今力は太陽の方向、つまり原点の向きにしか働かないので xyz 座標で考えるより極座標で考えたほうが便利です。

　さて、しかしここで問題なのが微分です。ニュートン運動方程式は基本的に xyz 座標で考えられています。なので座標を変えたときは微分の部分が変化します。具体的に見てみましょう。極座標（２次元）と xy 座標の関係は

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}$$

ですので一回微分は

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} &= \frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dt}}\cos\theta - r\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}} \\ \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} &= \frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dt}}\sin\theta + r\cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}} \end{aligned}$$

二回微分は

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d^2x}}{\mathrm{dt}^2} &= \frac{\mathrm{d^2r}}{\mathrm{dt}^2}\cos\theta - 2\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dt}}\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}} - r\cos\theta\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}}\right)^2 - r\sin\theta\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{dt}^2} \\ \frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dt}^2} &= \frac{\mathrm{d^2r}}{\mathrm{dt}^2}\sin\theta + 2\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dt}}\cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}} - r\sin\theta\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}}\right)^2 + r\cos\theta\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{dt}^2} \end{aligned}$$

また

$$\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = (\cos\theta, \sin\theta) \tag{4.2}$$

$$\mathbf{e}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta) \tag{4.3}$$

でこれから

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{dt}^2}\right)_r = \left(\frac{\mathrm{d^2x}}{\mathrm{dt}^2}, \frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dt}^2}\right)\cdot\mathbf{e}_r \tag{4.4}$$

$$= \frac{\mathrm{d^2r}}{\mathrm{dt}^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}}\right)^2 \tag{4.5}$$

右辺第二項はいわゆる遠心力の項です。あと θ 方向は

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{dt}^2}\right)_\theta = \left(\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x}}{\mathrm{dt}^2}, \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}}{\mathrm{dt}^2}\right)\cdot\mathbf{e}_\theta \tag{4.6}$$

$$= 2\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dt}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}} + r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{dt}^2} \tag{4.7}$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}}\right) \tag{4.8}$$

となります。このように座標を変えるとちょっと見にくい形になり、面倒なのがニュートン運動方程式の欠点です。さてこれから

$$m\left(\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{r}}{\mathrm{dt}^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}}\right)^2\right) = -\frac{GmM}{r^2} \tag{4.9}$$

$$m\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}}\right) = 0 \tag{4.10}$$

まず、二つ目の式を見ていきましょう。整理すると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}}\right) = 0$$

ですが $r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}} = r\cdot r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}}$ は r かける θ 方向の速度、つまり角運動量（から質量を割ったもの）になっています。今これが時間によらず一定なのでその値を l と置くと

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}} = \frac{l}{r^2} \tag{4.11}$$

となります。

　さて、もうひとつの式

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{r}}{\mathrm{dt}^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}}\right)^2 = -\frac{GM}{r^2}$$

ですが、今この式から惑星の楕円運動が出てくればうれしいわけなので時間ごと r の値より実は θ ごとの r の値のほうがやりやすいわけです。なのでまず、時間微分を θ 微分に書き換えをします。

$$\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}} \tag{4.12}$$

$$= \frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{d}\theta}\frac{l}{r^2} \tag{4.13}$$

$$= -l\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\frac{1}{r} \tag{4.14}$$

$$= -l\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{d}\theta} \tag{4.15}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{r}}{\mathrm{dt}^2} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dt}} \tag{4.16}$$

$$= \frac{l}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} - l\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{d}\theta} \tag{4.17}$$

$$= -l^2u^2\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{u}}{\mathrm{d}\theta^2} \tag{4.18}$$

よって

$$-l^2u^2\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{u}}{\mathrm{d}\theta^2} - u^3l^2 = -GMu^2 \tag{4.19}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{u}}{\mathrm{d}\theta^2} + u = L \tag{4.20}$$

$$u = A\cos(\theta + \alpha) + L \tag{4.21}$$

$$r = \frac{a}{1 + \epsilon\cos\theta} \tag{4.22}$$

となります。さて、これが本当に楕円軌道になっているか見てみましょう。

まず、$\epsilon = 0$ のとき r は θ に依存しないわけですからどの θ でも r 一定、つまりこれは円軌道になります。では $\epsilon \neq 0$ のとき、

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

に r を代入して

$$x = \frac{a}{1 + \epsilon\cos\theta}\cos\theta$$
$$y = \frac{a}{1 + \epsilon\cos\theta}\sin\theta$$

$\cos\theta, \sin\theta$ について解き直し

$$\cos\theta = \frac{x}{a - \epsilon x}$$
$$\sin\theta = \frac{y}{a - \epsilon x}$$

それぞれ二乗してたすと

$$\frac{x^2}{(a - \epsilon x)^2} + \frac{y^2}{(a - \epsilon x)^2} = 1$$
$$\frac{(1 - \epsilon^2)^2}{a^2}\left(x + \frac{a\epsilon}{1 - \epsilon^2}\right)^2 + \frac{1 - \epsilon^2}{a^2}y^2 = 1$$

これから $0 < \epsilon < 1$（$\epsilon > 1$）のときは楕円（双曲線）の式

$$\frac{x^2}{a^2} + (-)\frac{y^2}{b^2} = 1$$

を満たしていることがわかります。このようにニュートンは惑星の運動さえも証明し物理の夜明けを華々しく飾ったのです。