# はじめに

解析力学とは何か？という問いはなかなか面白い問いです。解析力学ができた当時は、「なんか変わったこと考え方で運動方程式みてるなぁ」ぐらいの受け取られだったこともあったでしょう。しかし、今では相対性理論や量子力学を考えるに至って解析力学の考え方は必須になってきます。その意味で古典物理と現代物理の橋渡し的な存在といえます。

具体的にはニュートンの運動方程式を数学的に一般化してとらえなおしてということもできますがずばり一言で

「最小作用の原理（変分原理）」

といってしまいましょう。ちょっと乱暴ですが。じゃあこいつはいったい何なのか？これからみていきましょう。

# Chapter 1

# 最速降下曲線

「最小作用の原理」を語る上で歴史的経緯として、また格好の例題をして最速降下曲線の問題が挙げられます。さて、最速降下曲線とは適当な二点（高さに差がある）を、ボールが最も早く転がり抜けるように引いた曲線のことです。この問題はベルヌーイが懸賞問題として発表し、そしてそれを一日でニュートンは解いてしまったといわれます。

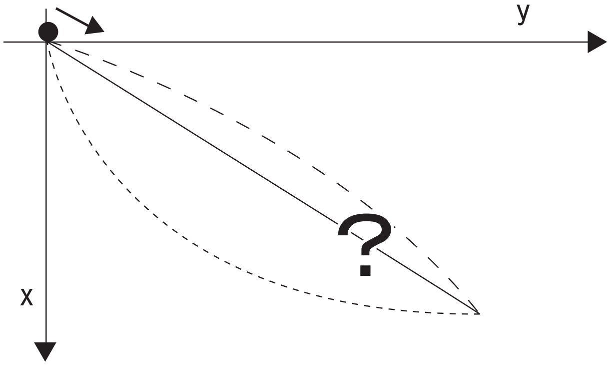


Figure 1.1: 最速降下線

この問題を解く方法は割りとシンプルです。まず、今適当な曲線をとりあえず考えます。どんなものでもよく「とりあえず」考えます。そしてこの曲線にそってボールが転がるときにかかる時間を求めます。これはわりと簡単です。まず、x まで落ちたときの速度はエネルギー保存より

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 - mgx &= 0 \\ v &= \sqrt{2gx} \end{aligned} \tag{1.1}$$

と求まります。x まで落ちたときの曲線の長さ s は

$$s = \int_0^x \mathrm{dx}\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dx^2}}\right)^2}$$

とかけるのでかかる時間は

$$T = \int_0^X \mathrm{dx}\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dx^2}}\right)^2 /2\mathrm{gx}} \tag{1.2}$$

と書けます。ここから最速降下曲線を見つけるにはつまり、このTが最小になるような $y(x)$ を見つけてやればいいわけです。ここで今のちのちのためより一般的な場合を考えて見ましょう。

## 1.1 オイラー・ラグランジュ方程式

さて今

$$S=\int \mathrm{dtL(t,r,\dot{r})}$$

というSを最小にする $r(t)$ を求めたいとします。$\dot{r}=\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dt}}$、$L(t,r,\dot{r})$ は $t,r,\dot{r}$ の任意の関数です。今SだとかLだとかxがtに変わっているのだとかはのちのちのちわかるので今は深く気にしないでください。さてSを最小にするような $r,\dot{r}$ があったとします。そのときそれぞれちょっとずつずらして $r+\delta r,\dot{r}+\delta\dot{r}$ としたときのSを $\delta S$ とすると、

$$\delta S=\int \mathrm{dt}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{r}}\delta \mathrm{r}+\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\mathrm{r}}}\delta\dot{\mathrm{r}} \tag{1.3}$$

とかけますが、さて今Sを最小にするような $r,\dot{r}$ 付近では $\delta S=0$ となります。それは微分で極値を求めるときに微分したものが0となる点を探すのと同じで、Sを最小にするような $r,\dot{r}$ 付近ではSの値はくぼ地にはまっている状態でほかの場所と違い少々ずれても変わらないわけです。つまり求める $r,\dot{r}$ の方程式は

$$\int \mathrm{dt}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{r}}\delta \mathrm{r}+\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\mathrm{r}}}\delta\dot{\mathrm{r}}=0$$

となります。さて今積分の始点終点では $r,\dot{r}=0$ として上の式を $\delta\dot{r}=\frac{\partial\delta r}{\partial t}$ を使って部分積分で整理すると

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{dt}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{r}}\delta \mathrm{r}+\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\mathrm{r}}}\delta\dot{\mathrm{r}} &= 0\\
\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\delta r\right]+\int \mathrm{dt}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{r}}\delta \mathrm{r}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\mathrm{r}}}\delta \mathrm{r} &= 0\\
\int \mathrm{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{r}}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\mathrm{r}}}\right)\delta \mathrm{r} &= 0
\end{aligned}$$

ここで今 $\delta r$ は好きに動かせる微少量なので右辺が0になるためには () の中が0でないといけないので

$$\frac{\partial L}{\partial r}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=0 \tag{1.4}$$

この式を「オイラー・ラグランジュ方程式」といいます。

## 1.2 サイクロイド曲線

さて、最速降下曲線の話にもどりましょう。さきほどのオイラー・ラグランジュ方程式 equation1.4 で $S\to T,t\to x,r\to y$ と置き直し式 equation1.2 の積分の中身

$$L=\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dx^2}}\right)^2/2gx}$$

を代入し、整理すると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= 0\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= 0\\
\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= C\\
\frac{\dot{y}}{\sqrt{2gx(1+\dot{y}^2)}} &= C\\
\frac{\dot{y}^2}{C^2} &= 2gx(1+\dot{y}^2)\\
\frac{1}{\dot{y}^2} &= \frac{1}{2gC^2x}-1
\end{aligned}$$

ここで

$$\frac{1}{\dot{y}^2} = \frac{1}{\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}} = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dy}}$$

なのと、$C^2 = \frac{1}{4ga}$ という a を使うと方程式は

$$\left(\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dy}}\right)^2 = \frac{2a}{x} - 1 \tag{1.5}$$

という形にかけます。実はこの方程式の解はサイクロイド曲線になっています。方程式から直接求めるのは難しいのでサイクロイドの式

$$\begin{aligned} y &= a(\theta - \sin\theta) \qquad (1.6) \\ x &= a(1 - \cos\theta) \qquad (1.7) \end{aligned}$$

を代入して解になっていることを確認するので勘弁してください。まず

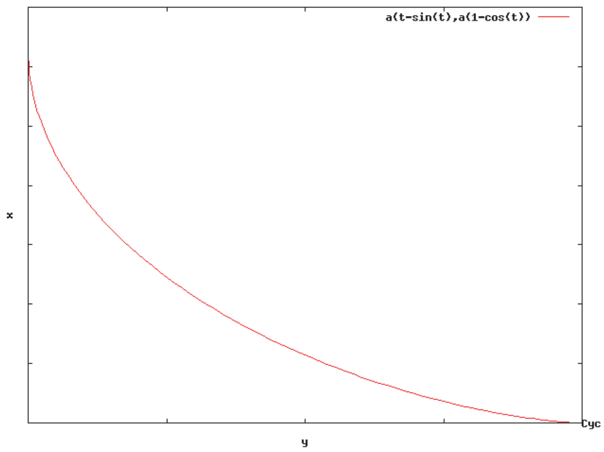


Figure 1.2: サイクロイド曲線

$$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dy}} = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{d}\theta} \cdot \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dy}} = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{d}\theta} \cdot \left(\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}\theta}\right)^{-1}$$

なので式 equation1.5 の右辺は

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dy}}\right)^2 &= \left\{\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{d}\theta} \cdot \left(\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}\theta}\right)^{-1}\right\}^2 \\ &= \frac{a^2 \sin\theta^2}{a^2(1-\cos\theta)^2} \\ &= \frac{1-\cos\theta^2}{(1-\cos\theta)^2} \\ &= \frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{(1-\cos\theta)^2} \\ &= \frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} \end{aligned}$$

そして式 equation1.5 の左辺は

$$\begin{aligned} \frac{2a}{x} - 1 &= \frac{2}{1-\cos\theta} - 1 \\ &= \frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} \end{aligned}$$

となり、サイクロイドが最速降下曲線であるとわかりました。

# Chapter 2

# 最小作用の原理とオイラー・ラグランジュ方程式

## 2.1 最小作用の原理

さて、「最小作用の原理」とは「物体の運動は作用を最小にするようにして決まる」というものです。では作用とはなんでしょうか？ってとこが気になりますが、ひとまず置いといてまず先ほどのオイラー・ラグランジュ方程式 equation1.4 を

$$L(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}) = T(\dot{\mathbf{r}}) - U(\mathbf{r})$$

で解いてみます。ここで T は運動エネルギーで

$$T(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2$$

U はポテンシャルエネルギーで、力 $F_i$ と

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}$$

との関係があります。なので

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} &= \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial T(\dot{\mathbf{r}})}{\partial \dot{r}} &= -\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \\
m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{dt}^2} &= \mathbf{F}
\end{aligned}$$

となり、これはまさにニュートンの運動方程式です。オイラー・ラグランジュ方程式はある

$$S = \int \mathrm{dtL}(\mathrm{t},\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})$$

を最小にする $\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}$ を見つける方程式だったわけです。つまり、力を $\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}$ と書ける場合、

$$S = \int \mathrm{dtL}(\mathrm{t},\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}) \tag{2.1}$$

$$L(t,\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}) = T(\dot{\mathbf{r}}) - U(\mathbf{r})$$

と置けば、この S を最小にする方程式はニュートンの運動方程式になる、つまり質量 m の物体の運動 $r,\dot{r}$ を導くわけです。まとめると

「$S=\int \mathrm{dt}(\mathrm{T}(\dot{\mathrm{r}})-\mathrm{U}(\mathrm{r}))$ を最小にするように物体の運動は決まる」

となるわけで、最小作用の原理の作用とはまさにこの S のことです。

まあ、と突然いわれても「運動エネルギーもポテンシャルエネルギーもニュートン運動方程式からでてきたものでしょ？それを組み合わせて作用とか言われても。。しかも $T(\dot{r})-U(r)$ って何さ？$T(\dot{r})+U(r)$ なら全運動量だけどマイナスだと何を表すものなの？」と思うかも知れません。僕が昔そう思いました。

しかし、とりあえず適当な L（以下ラグランジアンといいますが）例えば今の $L(t,\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})=T(\dot{\mathbf{r}})-U(\mathbf{r})$ を仮定したならその積分の S を最小にするように物体の運動は定まる。つまり解析力学の公理は

- 最小作用の原理
- 適当なラグランジアン L
- （慣性の法則）

の二つ（三つ）になるわけです。全宇宙の法則をしるためには我々は完璧なラグランジアンを見つければいいわけです。（$L(t,\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})=T(\dot{\mathbf{r}})-U(\mathbf{r})$ では電磁気のローレンツ力のような力を $\mathbf{F}=-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}$ と書けない場合には不完全。それについては後で）他にも解析力学のほうが数学的にきれいな形で書くことができたり、実際の計算が楽だったりします。これだけの理由だと必ずしもニュートン力学より解析力学のほうが勝っているとは言いがたいですが、量子力学ができ状況は大きく変わります。量子力学はいままでのニュートン物理とは大きく食い違うものでしたが、量子力学でも「最小作用の原理」は適応されるのです。こうなってくると誰もが解析力学の考え方こそが本質でそこからニュートン運動方程式が導けるのだ、と考えるようになったわけです。

さらにラグランジアンは多数の質点をまとめても成り立ちます。今ポテンシャルを万有引力、また静電気力だとするなら質点間の距離だけの関数なので

$$U(\mathbf{r_i})=\sum_{i\neq k}V(|\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_k|)$$

と書ける場合

$$L=\sum_i \frac{1}{2}m_i\dot{\mathbf{x}}_i^2-\sum_{i\neq k}V(|\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_k|) \tag{2.2}$$

この L から各々の質点の運動が導かれるわけです。以下断りがなければ L といばこの L のことを指すことにします。

## 2.2　例　重力中での惑星の運動

さて、ニュートン運動方程式で惑星軌道を得るのにはずいぶん苦労しましたね（力学惑星の運動参照)。これは極座標への微分の変換が面倒だったからです。なぜたいへんなのかと言えばニュートンの運動方程式は基本的に x,y,z 座標（直交直線座標）で考えられているので極座標のような曲線座標に適用するには一手間かかるわけです。しかし、オイラー・ラグランジュ方程式ではラグランジアン L さえわかっていれば

どんな座標だろうと作用を最小にするように運動が決まる→方程式の座標がどんなのでもかまわない

というようにオイラー・ラグランジュ方程式では好きなように座標が取れます。今惑星の軌道を考える上で太陽の位置を原点とした極座標 $(r,\theta)$ で惑星の質量を m、太陽の質量を M、重力定数を G とすると（ただし太陽は充分重いので動かないものとする）

$$T=\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+(r\dot{\theta})^2)$$
$$U(r)=-\frac{GmM}{r}$$

となりラグランジアンは $L(r,\dot{r})=T(\dot{r})-U(r)$ より

$$L(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+(r\dot{\theta})^2)+\frac{GmM}{r}$$

これから r に関するオイラー・ラグランジュ方程式は

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= \frac{\partial L}{\partial r} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(m\dot{r}) &= mr\dot{\theta}^2 - \frac{GmM}{r^2} \\
m\frac{\mathrm{d^2r}}{\mathrm{dt^2}} &= mr\dot{\theta}^2 - \frac{GmM}{r^2} \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

同じく $\theta$ に関する式は

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{\partial L}{\partial \theta} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(mr^2\dot{\theta}) &= 0 \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

とこの２式は惑星の運動で求めた運動方程式と同じです（式 equation2.4 は角運動量保存の式になってます)。以降の計算はそちらを参照してください。
とまあ、このようにオイラー・ラグランジュ方程式を使えばずいぶん簡単に運動方程式を求めることができました。複雑な力学の問題を解くなら断然オイラー・ラグランジュ方程式を使ったほうが便利なことは多いです。

# Chapter 3

# 保存量と対称性（ネーターの定理）

つづいて、オイラー・ラグランジュ方程式をつかって保存量を見ていきましょう。
保存量とはたとえばエネルギーや運動量などの時間変化しないでいつでも同じ値になるものでしたね。これを探すには時間微分が 0 になるものを見つければいいですが、その方法はニュートン運動方程式では基本的に片っ端から調べるしかなかったのに対して、解析力学では定理として方法があり、しかもこの考え方は量子力学などにも応用される現代物理の大きなテーマにもなっています。

## 3.1 循環座標

一番シンプルな保存量の見つけ方は循環座標を見つけることです。循環座標とはラグランジアン $L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$ に $q_i$ が含まれていないのような（$\dot{q}_i$ は含まれいている）座標のことです。先ほどの惑星の運動の場合は

$$L(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2) + \frac{GmM}{r}$$

なので、$\theta$ が循環座標にあたるわけです。さて循環座標ではどうなるかといえば、オイラー・ラグランジュ方程式が

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

なのでラグランジアン $L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$ に $q_i$ が含まれていないなら左辺第二項は 0 となり

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

より時間微分が 0 なので $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ は保存量になるわけです。先ほどの惑星の運動では式 equation2.4 の角運動量がそれにあたるわけです。解析力学ではより多くの循環座標があるように座標系を選べば計算が楽になるわけです。

## 3.2 ネーターの定理

さて、循環座標をとれば保存量がわかるというわけなんですが、「その循環座標をどうやって見つければいいのか？」という疑問が湧いてきます。そのため、保存量を見つける方法といてもっと一般的（数学的）な定理があります。それがネーターの定理です。具体的にどういうものかというと

「座標を少しだけ変えたもの（無限小変換）

$$q_i'(q,t) = q_i(t) + \varepsilon S_i(\mathbf{q},t)$$

を考え（$\varepsilon$ は無限小の定数、$S_i(\mathbf{q},t)$ は任意の関数）、ラグランジアン $L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$ を $\mathbf{q(t)} \to \mathbf{q'(q,t)}$ と置き換えても形が変わらないとき

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} S_i((\mathbf{q},t)) = 0 \tag{3.1}$$

が成り立つ（保存量になる）」

と言うものなんですが、いろいろわかりにくいですよね。とりあえず順を追って説明していきます。

まず、「無限小変換って何さ？」というととりあえず今座標を変えたいんです。そしてほんのちょっとだけ変えたのなら微分を使って表せるので便利なわけです。ほんのちょっと変えたものでも無限に繰り返せば有限の変換に戻るわけなんで、とりあえず便利なちょっとだけかえるもの「無限小変換」を考えるわけです。そしてそのちょっと変えたものは「元のやつ」＋「ちっちゃな変化」

$$q_i'(q,t) = q_i(t) + \delta q_i$$

とかけるわけで、$\delta q_i$ は小さな値の q や t の関数だから（座標を他の座標に変えるだけなんだから他の変数がでてきませんよね）小さい定数 $\varepsilon$ を使い

$$\delta q_i = \varepsilon S_i(\mathbf{q}, t)$$

と書き直してもいいわけです。なんでこんな形にしたかというのはあとで具体的な例を見たときにわかると思います。
続いて、「ラグランジアン $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ を $\mathbf{q(t)} \to \mathbf{q'(q,t)}$ と置き換えても形が変わらない」というのは単純に $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ の $\mathbf{q(t)}$ に $\mathbf{q'(t)}$ を代入し計算したものと代入する前のやつが同じいうことです。例えばポテンシャルがない 1 次元の運動のとき

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

ですが $x' = x + \varepsilon$ を考えると加えるのは定数なの代入しても

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m\dot{x}'^2 && (3.2)\\ &= \frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(x+\varepsilon) && (3.3)\\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 && (3.4)\end{aligned}$$

と一緒になりますね。このようにラグランジアンの形が変わらないことをその変換に対して「対称性がある」といいます。
さて、今対称性があるかどうかわからない無限小変換をとりあえずしたとします。それでラグランジアンがどれだけ変化したかは

$$\delta L = L(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}') - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

とかけますね。さて今変化は充分小さいので微分を使い

$$L(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}') = L(\mathbf{q}+\delta\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}+\delta\dot{\mathbf{q}}) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i$$

よって

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i$$

ここで

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) - \delta q_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$$

なので結局

$$\delta L = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right)\delta q_i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right)$$

しかしよく見てみると右辺第一項の括弧内はオイラー・ラグランジュ方程式 equation1.4 になっていますね。よって 0 となり

$$\delta L = \sum_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right)$$

そしてもし対称性があるならラグランジアンは一緒つまり $\delta L = 0$ なので

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) = 0$$

$\delta q_i = \varepsilon S_i(\mathbf{q}, t)$ と置き換えると $\varepsilon$ は定数なので

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} S_i(\mathbf{q}, t) \right) = 0$$

と式 equation3.1 が導けたわけです。

## 3.3 対称性と保存則

### 3.3.1 空間平行移動対称性と運動量

空間を平行にずらす変換

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{a}$$

に対してラグランジアンは

$$\begin{aligned} L &= \sum \frac{1}{2} m_i \left( \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}_\mathrm{i}}{\mathrm{dt}} \right)^2 - \sum V(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k|) && (3.5) \\ \rightarrow L' &= \frac{1}{2} m_i \left( \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}_\mathrm{i}}{\mathrm{dt}} \right)^2 - \sum V(|\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}'_k|) && (3.6) \\ &= \sum \frac{1}{2} m_i \left( \frac{\mathrm{d}(\mathbf{x}_\mathrm{i} + \mathbf{a})}{\mathrm{dt}} \right)^2 - \sum V(|\mathbf{x}_i + \mathbf{a} - (\mathbf{x}_k + \mathbf{a})|) && (3.7) \\ &= \sum \frac{1}{2} m_i \left( \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}_\mathrm{i}}{\mathrm{dt}} \right)^2 - \sum V(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k|) = L && (3.8) \end{aligned}$$

と不変なのでネーターの定理より $\mathbf{a} = \varepsilon S, S = (1, 1, 1)$ とすると

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} S_i(\mathbf{q}, t) \right) &= 0 && (3.9) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} (m v_x + m v_y + m v_z) &= 0 && (3.10) \\ m\mathbf{v} &= Const && (3.11) \end{aligned}$$

となり運動量保存を表しています。

### 3.3.2 空間回転対称性と角運動量

空間の回転を表す変換は

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x \cos\theta + y \sin\theta \\ y \cos\theta - x \sin\theta \\ z \end{pmatrix}$$

これを無限小変換とすると $\varepsilon \rightarrow 0$ で $\sin\varepsilon = \varepsilon, \cos\varepsilon = 1$ から

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x + \varepsilon y \\ y - \varepsilon x \\ z \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

この変換に対して

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}^2 \to \dot{\mathbf{x}}'^2 &= (\dot{x} + \varepsilon\dot{y})^2 + (\dot{y} - \varepsilon\dot{x})^2 + \dot{z}^2 \\
&= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + (\varepsilon\dot{y})^2 + (\varepsilon\dot{x})^2 \\
&\cong \dot{\mathbf{x}}^2
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k| \to |\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}'_k| &= \sqrt{\{x_i + \varepsilon y_i - (x_k + \varepsilon y_k)\}^2 + \{y_i - \varepsilon x_i - (y_k - \varepsilon x_k)\}^2 + (z_i - z_k)^2} \\
&= \sqrt{(x_i - x_k)^2 + \varepsilon^2(y_i - y_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + \varepsilon^2(x_i - x_k) + (z_i - z_k)^2} \\
&\cong |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k|
\end{aligned}
$$

なのでラグランジアンは

$$
L' = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{x}'}_i^2 - \sum_{i \neq k} V(|\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}'_k|) = L
$$

で不変、よってネーターの定理から

$$
\delta q = \mathbf{x}' - \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \varepsilon y \\ -\varepsilon x \\ 0 \end{pmatrix} = \varepsilon \mathbf{S}
$$

$$
\mathbf{S} = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}
$$

で

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} S_i(\mathbf{q}, t) \right) = 0 \tag{3.14}
$$

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} m(y\dot{x} - x\dot{y}) = 0 \tag{3.15}
$$

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} m(\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}})_z = 0 \tag{3.16}
$$

$$
m(\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}})_z = Const \tag{3.17}
$$

これはｚ方向の角運動量保存を表しています。ｘ、ｙ軸の回転を考えれば同様にｘ、ｙ方向の角運動量保存ができます。

### 3.3.3 時間の平行移動対称性とエネルギー

さて、今までは対称性をラグランジアンで考えてきましたが運動は作用 S、ラグランジアン L の時間積分を最小にするように決まるわけですから実は作用 S の対称性が大切なわけです。ただラグランジアン L が対称ならその積分の作用も対称なので問題なかったわけです。

今、時間の平行移動を考えてみたいと思います。

$$
t' = t + \varepsilon
$$

このとき、$q(t), \dot{q}(t)$ の位置座標は変えないようにします。（そうしないと対称性は $L(q(t'), \dot{q}(t'), t') = L(q(t), \dot{q}(t), t)$ が成り立つこと、つまり L が時間変化しない、保存量という厳しすぎる条件になってしまいますので）つまり時間がずれた分を $q(t), \dot{q}(t)$ は逆にずらして

$$
q'(t') = q(t' - \varepsilon) = q(t) \tag{3.18}
$$

$$
\dot{q}'(t') = \dot{q}(t' - \varepsilon) = \dot{q}(t) \tag{3.19}
$$

というものを考えます。
　この変換に対して作用 S が対称だとすると（L が対称だけだと今回は t が変化するので積分区間の扱いができなくて先ほどまでのネーターの定理では議論できない）

$$\sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L = Const \tag{3.20}$$

が得られます。(証明は物理のかぎしっぽ http://hooktail.sakura.ne.jp/analytic/energyDefinitionConservation/ を参照してください)
　具体的に

$$L = \sum \frac{1}{2}m_i\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}_\mathrm{i}}{\mathrm{dt}}\right)^2 - \sum V(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k|)$$

のとき

$$\begin{aligned}\sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L &= \sum m_i\dot{\mathbf{x}}_i^2 - \left(\sum \frac{1}{2}m_i\dot{\mathbf{x}}_i^2 - \sum V(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k|)\right) &(3.21)\\ &= \sum \frac{1}{2}m_i\dot{\mathbf{x}}_i^2 + \sum V(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k|) &(3.22)\end{aligned}$$

となりこれはよく知るエネルギーの形です。つまり

- 空間の平行移動対称性　→　運動量保存
- 空間の回転対称性　→　角運動量保存
- 時間の平行移動対称性　→　エネルギー保存

という美しい法則が解析力学では明らかになります。